Universitatea Tehnică Gh. Asachi Iaşi Director proiect,

Prof. dr. Gheorghe Zet

S I N T E Z A

lucrărilor efectuate pentru Etapa 2007 (unică) la proiectul „Modele clasice şi cuantice pentru câmpurile gauge" Cod **ID - 620**, contract nr. 2/28.09.2007

Obiectivul 1: **Model bazat pe teoria gauge cuantică a gravitației**

1.1.Definirea integralei acțiunii

S-a construit unui model pentru câmpurile gauge (clasice şi cuantice) bazat pe teoria gauge cuantică a gravitației. Grupul de simetrie gauge gravitațional *G* folosit constă din transformările) infinitezimale [1, 10]:

$$U(\varepsilon) \cong 1 - \varepsilon^{\alpha} P_{\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3,0, \tag{1}$$

unde ε^{α} sunt parametrii infinitezimali ai grupului şi $P_{\alpha} = -i\,\partial_{\alpha}$ sunt generatorii acestui grup. Relațiile de comutare dintre aceşti generatori sunt:

$$[P_{\alpha}, P_{\beta}] = 0. \tag{2}$$

S-a introdus apoi 1-forma de câmp cu valori în algebra Lie a grupului *G*, prin relația :

$$A(x) = A_{\mu}(x)dx^{\mu} = A_{\mu}^{\alpha}(x)P_{\alpha}\,dx^{\mu}, \quad \mu = 1,2,3,0, \tag{3}$$

unde $A_{\mu}^{\alpha}(x)$ sunt potențialele gauge gravitaționale. Cu ajutorul acestora, s-a construit derivata gauge covariantă:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - i\,g\,A_{\mu}(x), \tag{4}$$

unde *g* notează constanta de cuplaj gauge pentru interacțiunile gravitaționale.

Este mai convenabil să lucrăm cu alte potențiale gauge, echivalente:

$$G_{\mu}^{\alpha}(x) = \delta_{\mu}^{\alpha} - g\,A_{\mu}^{\alpha}(x). \tag{5}$$

Presupunem că aceste noi potențiale admit inversele $\overline{G}_{\alpha}^{\mu}(x)$, conform condițiilor:

$$\overline{G}_{\alpha}^{\mu}\,G_{\mu}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad \overline{G}_{\alpha}^{\mu}\,G_{\nu}^{\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}. \tag{6}$$

Construim apoi 2-forma de curbura $F = F_{\mu\nu}(x)dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = F_{\mu\nu}^{\alpha}(x)P_{\alpha}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$, asociată acestor potențiale şi luând valori în algebra Lie a grupului *G*, unde

$$F_{\mu\nu}^{\alpha}(x) = G_{\mu}^{\beta}\,\partial_{\beta}A_{\nu}^{\alpha} - G_{\nu}^{\beta}\,\partial_{\beta}A_{\mu}^{\alpha}. \tag{7}$$

Pentru a face legătura cu teoria relativității generale, construim apoi tensorul metric pe spațiul grupului gauge gravitațional:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\,\overline{G}_{\alpha}^{\mu}\,\overline{G}_{\beta}^{\nu}, \tag{8.a}$$

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\mu\nu}\,G_{\mu}^{\alpha}\,G_{\nu}^{\beta}, \tag{8.b}$$

unde $\eta_{\mu\nu} = diag(1,1,1,-1)$ este tensorul metric al spațiului-timp Minkowski M şi $\eta^{\mu\nu}$ inversul său.

S-a definit apoi integrala acțiunii pentru câmpul gravitațional sub forma [1]:

$$S = \int \sqrt{-\det\left(g_{\alpha\beta}\right)}\, L\, d^4 x, \tag{9}$$

unde $\det\left(g_{\alpha\beta}\right)$ notează determinantul tensorului metric $g_{\alpha\beta}$ şi L este densitatea de Lagrangian a câmpului gravitațional. Deoarece am urmărit să introducem in model constanta cosmologică Λ, s-a ales L de forma [1]:

$$\begin{aligned} L = &-\frac{1}{16}\eta^{\mu\rho}\,\eta^{\nu\sigma}\, g_{\alpha\beta}\, F^{\alpha}_{\mu\nu}\, F^{\beta}_{\rho\sigma} - \frac{1}{8}\eta^{\mu\rho}\, \overline{G}^{\nu}_{\beta}\, \overline{G}^{\sigma}_{\alpha}\, F^{\alpha}_{\mu\nu}\, F^{\beta}_{\rho\sigma} \\ &+ \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\, \overline{G}^{\nu}_{\alpha}\, \overline{G}^{\sigma}_{\beta}\, F^{\alpha}_{\mu\nu}\, F^{\beta}_{\rho\sigma} + \frac{\Lambda}{2g^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Impunând condiția de anulare a variației acțiunii S sub forma $\delta S = 0$, in raport cu potențialele gauge $A^{\alpha}_{\mu}(x)$, s-au obținut ecuațiile de câmp generale:

$$\begin{aligned} &\partial_{\mu}\Big(\frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} g_{\alpha\beta} F^{\sigma}_{\rho\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{\nu\rho} F^{\mu}_{\rho\alpha} + + \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho} F^{\nu}_{\rho\alpha} \\ &- \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\delta^{\nu}_{\alpha} F^{\beta}_{\rho\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\alpha} F^{\beta}_{\rho\beta}\Big) - \frac{\Lambda}{2g}\overline{G}^{\nu}_{\alpha} = -g\left(T_g\right)^{\nu}_{\alpha}, \end{aligned} \tag{11}$$

unde $\left(T_g\right)^{\nu}_{\alpha}$ este tensorul energie-impuls gravitațional considerat ca sursă a cestui câmp [3, 10]. Expresia acestui tensor s-a obținut cu ajutorul unui program de calcul elaborat de noi, bazat pe sistemul MAPLE. S-a obținut apoi o soluție pentru ecuațiile de câmp (11) considerând cazul când potențialele gauge au simetrie sferică [1, 4]:

$$A^{\alpha}_{\mu}(x) = diag\left(A(r), \frac{r-1}{g\,r}, \frac{r\sin\theta - 1}{g\, r \sin\theta}, -\frac{A(r)}{1 - g\,A(r)} \right), \tag{12}$$

unde $A(r)$ este o funcție numai de coordonata radială r.

1.2. Calculul tensorului energie-impuls şi obținerea ecuațiilor de câmp

Folosind programul de calcul MAPLE [6, 8], s-au obținut componentele tensorului $F^{\alpha}_{\mu\nu}(x)$, ale metricii $g_{\alpha\beta}$ şi $g^{\alpha\beta}$, precum şi ale tensorului energie-impuls $\left(T_g\right)^{\nu}_{\alpha}$ al câmpului gravitațional. Prezentăm aici câteva dintre componentele ne-nule, mai simple, ale lui $\left(T_g\right)^{\nu}_{\alpha}$:

$$\begin{aligned} T^1_1 &= -\frac{A(r)\left(2 - g\,A(r)\right)}{2\,g\,r^2\left(1 - g\,A(r)\right)} + \frac{A'(r)}{g\,r} - \frac{1}{g^2 r^2 \sin^3\theta} + \frac{1}{2\,g^2 r^2 \sin\theta}, \\ T^2_1 &= \frac{\cos\theta}{g^2 r^3 \sin^2\theta}, \quad T^1_2 = -\frac{\left(1 - g\,A(r)\right)}{2\,g^2 r^2 \sin^2\theta}, \end{aligned} \tag{13}$$

unde $A'(r)$ notează derivata funcției necunoscute $A(r)$ in raport cu variabila r.

Folosind aceste expresii s-au obținut următoarele ecuații de câmp [1]:

$$\frac{1}{2\,g\,r^2\left(1 - g\,A(r)\right)}\left(2\,g^2\, r\, A(r) A'(r) - 2\,g\,r\,A'(r) + g^2 A(r)^2 - 2\,g\,A(r) + \Lambda r^2\right) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{2\,g}\left(2\,g^2 A(r) A'(r) + g^2\, r\, A(r) A''(r) - 2\,g\,A'(r) + g^2\, r\, A'(r)^2 - g\,r\,A''(r) + \Lambda\, r\right) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\sin\theta}{2g}\left(2g^2 A(r)A'(r)+g^2 r\,A(r)A''(r)-2g\,A'(r)+g^2 r\,A'(r)^2-g\,r\,A''(r)+\Lambda\,r\right)=0$$

(16)

$$\frac{1-g\,A(r)}{2g\,r^2}\left(2g^2 r\,A(r)A'(r)-2g\,r\,A'(r)+g^2 A(r)^2-2g\,A(r)+\Lambda\,r^2\right)=0\,, \tag{17}$$

unde $A''(r)$ este derivata de ordinul al doilea în raport cu r a funcției $A(r)$.

1.3. Construirea unei soluții conținând constanta cosmologică

Ecuațiile (14) – (17) sunt echivalente dacă $1-g\,A(r)\neq 0$, astfel că avem numai o singură ecuație independentă pentru o singura funcție necunoscută $A(r)$. Făcând apoi notația $y(r)=1-g\,A(r)$, din ecuația (14) obținem:

$$r\,y'(r)+y(r)=1-\Lambda\,r^2\,, \tag{18}$$

cu soluția

$$y(r)^2=1+\frac{\alpha}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2\,, \tag{19}$$

unde α este o constantă arbitrară de integrare. Atunci,

$$A(r)=\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{\alpha}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2}}{g}\,, \tag{20}$$

şi alegând $\alpha=-\frac{2GM}{c^2}$, unde M este masa sursei punctiforme a câmpului gravitațional descris de $A(r)$, din relația (8.a) obținem metrica Schwarzschild-de-Sitter al cărei element de linie este:

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{c^2r}-\frac{\Lambda}{3}r^2}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 \tag{21}$$

Subliniem că acest element de linie este definit pe spațiul grupului gauge gravitațional G, iar spațiul-timp bază M rămâne de tip Minkowski (plat).

Concluzia importantă care rezultă din evaluările de mai sus este că putem trata gravitația ca o *interacțiune fizică* într-un spațiu-timp plat (fără curbură). Câmpul gravitațional se descrie prin potențialele gauge $A^{\alpha}_{\mu}(x)$, iar metrica se construieşte pe spațiul grupului gauge gravitațional G şi nu influențează spațiul-timp. Ca urmare, este mai uşor să obținem modele cuantice pentru câmpul gravitațional şi, în general, pentru câmpurile gauge, folosind metoda integralei funcționale [7], dat fiind că spațiul-timp este plat.

Obiectivul 2: Definirea produsului star dintre câmpurile pe spații-timp necomutatve

2.1. Construirea unei derivate gauge-covariantă

S-a considerat un spațiu-timp necomutativ pentru descrierea teoriilor gauge. Aceasta înseamnă că se folosesc coordonate x^{μ} $(\mu=1,2,3,0)$ care satisfac relațiile de comutare:

$$\left[x^{\mu},x^{\nu}\right]=i\,\theta^{\mu\nu}\,, \tag{22}$$

unde $\theta^{\mu\nu}$ este o matrice constantă antisimetrică. În acest caz, trebuie sa înlocuim produsul obişnuit $\Phi(x)\Psi(x)$ dintre doi operatori de câmp, prin produsul star „* „ conform definiției:

$$\Phi(x) * \Psi(x) = \Phi(x) \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}_{\mu} \otimes \overrightarrow{\partial}_{\nu}\right)\Psi(x). \tag{23}$$

Modelele necomutative bazate pe acest produs au neajunsul că nu sunt Lorentz-invariante, în sensul că relația (22) nu este invariantă față de transformările Lorentz. Totuşi, ele sunt invariante față de algebra Poincaré deformată cu un operator (twist) abelian:

$$F = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} P_{\mu} \otimes P_{\nu}\right), \tag{24}$$

unde P_{μ} sunt generatorii translațiilor spațio-temporale definiți mai sus. Operatorul F induce in spațiul reprezentărilor algebrei Poincaré un *produs deformat*:

$$m \circ (\Phi \otimes \Psi) = \Phi\Psi \rightarrow m_{*} \circ (\Phi \otimes \Psi) = m \circ F^{-1}(\Phi \otimes \Psi) \equiv (\Phi * \Psi), \tag{25}$$

care este tocmai produsul star „* „ din (23).

Atunci când operatorul twist F este ales ca în (24), produsul „* „ este fixat pentru totdeauna şi deci el nu suferă vre-o modificare față de transformările unui grup gauge intern. Ca urmare, apar difcultăți atunci când încercăm să deformăm transformările gauge interne cu acelaşi operator twist (24). Este deci necesar să găsim un principiu general de simetrie pe baza căruia să putem construi teorii gauge necomutative şi gravitaționale lipsite de contradicții interne. Vom descrie în continuare *rezultatele noastre* privind un astfel de principiu [2].

Presupunem că $\hat{g}$ este o algebră Lie de simetrie internă (de ex. asociată grupului gauge G), ai cărei generatori infinitezimali $T_a, a = 1,2,....,m$ satisfac relațiile de comutare:

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^{c}\, T_c, \quad f_{ab}^{c} = -f_{ba}^{c}. \tag{26}$$

unde $f_{ab}^{c} = -f_{ba}^{c}$ sunt constantele de structură . Dacă presupunem apoi că $\hat{g}$ este o algebră de simetrie locală (gauge), atunci o transformare gauge este dată de operatorul:

$$\delta_{\alpha} = \alpha^{a}(x) T_a. \tag{27}$$

Introducem, ca de obicei, câmpurile gauge , cu valori în algebra Lie, prin relația:

$$A_{\mu} = A_{\mu}^{a}(x) T_a. \tag{28}$$

Cu ajutorul lor construim derivate gauge-covariantă:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - i A_{\mu}(x), \tag{29}$$

care are proprietatea că $D_{\mu}\Phi(x)$ se transformă covariant pentru orice câmp $\Phi(x)$:

$$\delta_{\alpha} D_{\mu}\Phi(x) = i\alpha^{a}(x)(D_{\mu}\Phi(x)). \tag{30}$$

În cazul când dorim să avem un model care include simultan simetriile gauge internă $\hat{g}$ şi externă P (Poincaré), trebuie să folosim algebra Hopf $U(P \triangleright \hat{g})$ a produsului semi-direct dintre cele două algebre. Atunci, derivata gauge covariantă trebuie scrisă sub forma:

$$D_{\mu} = i(P_{\mu} - A_{\mu}^{a}\, T_a), \tag{31}$$

unde $P_{\mu} = -i\,\partial_{\mu}$.

În lucrarea [9] s-a arătat că folosirea unui operator twist abelian pentru a deforma algebra Hopf $U(P \triangleright \hat{g})$ nu este compatibilă cu conceptul de transformare gauge. Acest lucru se datoreşte faptului că derivata obişnuită $\partial_\mu \Phi(x)$ a unui câmp nu este gauge invariantă (nu se transformă ca şi câmpul însuşi). Însă, ţinând seama de proprietatea (30), în lucrarea noastră [2] am definit un operator twist ne-abelian T folosind derivate gauge covariantă:

$$T = e\mathrm{xp}\left(-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} D_\mu \otimes D_\nu + O\left(\theta^2\right)\right). \tag{32}$$

Corespunzător, am definit un nou produs star $*_N$ deformat, prin:

$$m \circ (\Phi \otimes \Psi) = \Phi\Psi \to m_{*_N} \circ (\Phi \otimes \Psi) = m \circ T^{-1}(\Phi \otimes \Psi) \equiv (\Phi *_N \Psi). \tag{33}$$

2.2. Verificarea proprietăţilor produsului star

In general, acest nou produs star nu este asociativ, astfel încât trebuie sa-i acordăm o deosebită atenţie atunci când lucrăm cu el. Studiul operatorilor twist folosind derivata gauge covariantă rămâne o problemă deschisă pentru noi cercetări. Totuşi, pentru anumite clase de reprezentări ale algebrei Hopf $U(P \triangleright \hat{g})$ proprietatea de asociativitate este îndeplinită, aşa cum arătăm în continuare.

Folosind algebra Hopf $U(P \triangleright \hat{g})$ drept algebră de simetrie pentru teoria gauge necomutativă, trebuie să introducem pentru ea un co-produs Δ, un element unitate 1 şi o co-unitate ε cu proprietăţile:

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \forall\, X \in U(P \triangleright \hat{g}), \tag{34}$$

$$(id \otimes \in) \circ \Delta = 1 = (\in \otimes id) \circ \Delta. \tag{35}$$

Operatorul twist T trebuie să satisfacă condiţiile:

$$(T \otimes 1)(\Delta \otimes id)T = (1 \otimes T)(id \otimes \Delta)T, \tag{36}$$

$$(id \otimes \in)T = (\in \otimes id)T. \tag{37}$$

In lucrările noastre am verificat condiţia (34) şi am stabilit că ea este îndeplinită numai pentru acele reprezentări ale algebrei $U(P \triangleright \hat{g})$ care satisfac constrângerile:

$$F_{\rho\mu}(\Phi) \otimes D_\nu(\Psi) \otimes D_\sigma(\Sigma) + D_\mu(\Phi) \otimes F_{\nu\rho}(\Psi) \otimes D_\sigma(\Sigma) = 0, \tag{38}$$

$$D_\rho(\Phi) \otimes F_{\mu\sigma}(\Psi) \otimes D_\nu(\Sigma) + D_\rho(\Phi) \otimes D_\mu(\Psi) \otimes F_{\nu\sigma}(\Sigma) = 0, \tag{39}$$

unde Φ, Ψ, Σ sunt câmpuri arbitrare care aparţin spaţiului de reprezentare.

Concluzia care rezultă din cercetările noastre este că simetria Poincaré externă şi simetria gauge internă nu pot fi unificate într-un operator twist comun [2]. Acest lucru ar putea fi o consecinţă a teoremei Coleman-Mandula, dar nu în întregime, deoarece această teoremă se referă la grupurile de simetrie globale. Este totuşi posibil ca situaţia să se inverseze, având în vedere că supersimetria include simetriile interne.

2.3. Exemplu de model necomutativ bazat pe aplicaţia Seiberg-Witten

Folosind rezultatele proprii anterioare, am obţinut corecţii de necomutativitate pentru metrica (21), presupunând $\Lambda = 0$. Pentru aceasta, am folosit aplicaţia Seiberg-Witten [11], obţinând următoarele expresii pentru componentele metricii până la ordinul al doilea în parametrul θ:

$$\hat{g}_{11} = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}} - \frac{\alpha(4\mathrm{r}-3\alpha)}{16r^2(\mathrm{r}-\alpha)^2}\theta^2 + O(\theta^4), \tag{40}$$

$$\hat{g}_{22} = r^2 + \frac{2\mathrm{r}^2 - 17\alpha\mathrm{r} + 17\alpha^2}{32r(\mathrm{r}-\alpha)}\theta^2 + O(\theta^4), \tag{41}$$

$$\hat{g}_{33} = r^2\sin^2\theta + \frac{\left(\mathrm{r}^2 + \alpha\mathrm{r} - \alpha^2\right)\cos^2\theta - \alpha(2\mathrm{r}-\alpha)}{16r(\mathrm{r}-\alpha)}\theta^2 + O(\theta^4), \tag{42}$$

$$\hat{g}_{00} = -\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{\alpha(8\mathrm{r}-11\alpha)}{16r^4}\theta^2 + O(\theta^4). \tag{43}$$

unde s-a ales $\theta^{12} = -\theta^{21} = \theta$ şi restul componentelor lui $\theta_{\mu\nu}$ egale cu zero.

Se observă că în aceste expresii apar corecţii de necomutativitate numai în ordinul al doilea în parametrul θ.

Având aceste corecţii, se pot studia proprietăţile termodinamice ale unui black hole. De asemenea, sunt posibile generalizări la alte metrici. Aceste aspecte vor fi abordate în etapele următoare ale proiectului.

Bibliografie

Lucrări proprii:

în reviste indexate ISI:

1. G. Zet, C. Popa, D. Partenie: Schwarzschild-de-Sitter Solution in Quantum Gauge Theory of Gravity, Commun. Theor. Phys. (Beijing, China), Vol. **47** (2007) pp. 843-846
2. M. Chaichian, A. Tureanu, G. Zet: Twist as a symmetry principle and noncommutative gauge theory formulation, Phys. Lett. **B651** (2007) pp. 319-323

în reviste indexate în baze de date internaţionale

3. B. Ciobanu, I. Radinschi: Modeling the Energy Distributions of a Dilaton-Maxwell Gravity; va apare în Romanian Journal of Physics Vol. **53**, nr. 1-2 (2008) pp. 29-34
4. G. Zet, C. Popa: Spherical gauge gravitation field and spontaneous symmetry breaking, 8-th International Balkan Workshop on Applied Physics, July 5-7, 2007, Constanţa; acceptată pentru publicare în Romanian Journal of Physics 2008
5. M. Chaichian, M. Setare, A. Tureanu, G. Zet: Noncommutative corrections for spherically symmetric gravitational fields, International Conference on Fundamental and Applied Research in Physics, FARPhys-2007, Iaşi 25-27 octombrie 2007; acceptată pentru publicare în Analele Universităţii Al. I. Cuza Iaşi, Secţiunea Fizică, 2008
6. G. Zet, V. Manta, C. Popa: Analytical program for gauge models, International Conference on Fundamental and Applied Research in Physics, FARPhys-2007, Iaşi 25-27 octombrie 2007; acceptată pentru publicare în Analele Universităţii Al. I. Cuza Iaşi, Secţiunea Fizică, 2008
7. V. Chiriţoiu, G. Zet, S. Babeti: Quantization of gauge fields on de-Sitter group by functional integral method, International Conference on Fundamental and Applied Research in Physics, FARPhys-2007, Iaşi 25-27 octombrie 2007; acceptată pentru publicare în Analele Universităţii Al. I. Cuza Iaşi, Secţiunea Fizică, 2008

8. S. Aruştei, V. Manta: Quantum Computation Language Implementation of the Berstein-Vazirani Algorithm, 9-th International Symposium on Automatic Control and Computer Science, Iaşi, November 16-17, 2007, Proceedings Ed. Politehnium, 2007, p. 179-182, ISSN 1843-7257; acceptată pentru publicare în Buletinul Institutului Politehnic Iaşi, fasc. 1-4 Automatică şi calculatoare, 2007

Lucrări alți autori:

9. M. Chaichian, A Tureanu: Twist Symmetry and Gauge Invariance, Phys. Lett. **B637** (2006) pp. 199-202
10. N. Wu: Renormalizable Quantum Gauge Theory of Gravity, Commun. Theor. Phys. (Beijing, China), Vol. **38** (2002) pp. 151-156
11. N. Seiberg, E. Witten: String Theory and Noncommutativity Geometry, JHEP 9909 (1999) 032