Universitatea Tehnică Gh. Asachi Iaşi Director Proiect,

Prof.dr. Gheorghe Zet

S I N T E Z A
Lucrărilor efectuate pentru Etapa 2008 (unică) a proiectului
„Modele clasice şi cuantice pentru câmpurile gauge”
Cod **ID – 620,** contract nr. 2/28.09.2007,
act adițional nr.1/2008

Obiectivul 1: Formularea teoriei gauge generale cu grupul structural $SU(n)\times SO(p,q)$

1.1. Obținerea ecuațiilor de structură ale grupului gauge

Grupul $SO(p,q)$ are dimensiunea egală cu *m*(*m*-1)/2 unde *m* = *p* + *q*, iar grupul $SU(n)$ este ne-abelian, având dimensiunea n^2-1. Generatorii infinitezimali ai grupului $SO(p,q)$ sunt notați prin $M_{ab},\ a,b=1,2,3,...,m$, iar cei ai lui $SU(n)$ prin $T_\alpha,\ \alpha=1,2,3,...,n^2-1$. În general, $M_{ab}=L_{ab}+\Sigma_{ab}$, unde L_{ab} sunt operatorii momentului cinetic, iar Σ_{ab} notează generatorii de spin în reprezentarea considerată. Ecuațiile de structură ale grupului $SU(n)\times SO(p,q)$ sunt [2, 7]:

$$[M_{ab},M_{cd}]=\eta_{bc}M_{ad}-\eta_{ac}M_{bd}-\eta_{bd}M_{ac}+\eta_{ad}M_{bc}\,, \tag{1.1a}$$

$$[T_\alpha,T_\beta]=f^\gamma_{\alpha\beta}T_\gamma\,, \tag{1.1b}$$

$$[M_{ab},T_\alpha]=0\,, \tag{1.1c}$$

unde

$$\eta_{ab}=diag\left(\underbrace{1,1,...,1}_{p},\underbrace{-1,-1,...,-1}_{q}\right)$$

este metrica Lorentz *m*-dimensională, iar $f^\gamma_{\alpha\beta}=-f^\gamma_{\beta\alpha}$ sunt constantele de structură ale grupului $SU(n)$. În cazul particular al grupului $SU(2)$ constantele de structură $f^\gamma_{\alpha\beta}$ coincid cu tensorul complet anti-simetric $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, cu proprietatea $\varepsilon_{123}=+1$. Ecuația (1.1c) arată că grupul $SU(n)\times SO(p,q)$ are structura unui produs direct. Pentru a descrie câmpul gravitațional vom alege grupul gauge $SO(1,4)$, care are dimensiunea $m=p+q=5$. Deci, vom avea $a=b=0,1,2,3,5$, sau notând $i,j,k=0,1,2,3$, vom scrie $a=i,5$ etc.

1.2. Definirea derivatei gauge invariantă

Definim derivatei gauge invariantă asociată grupului de simetrie locală $SU(n)\times SO(p,q)$ prin relația [2]

$$\nabla_\mu\Phi(x)=\left(\partial_\mu+\frac{g'}{2}A^{ab}_\mu\Sigma_{ab}+g''A^\alpha_\mu T_\alpha\right)\Phi(x), \tag{1.2}$$

unde $A^{ab}_\mu(x)=-A^{ba}_\mu(x)$ sunt potențialele gauge $SO(p,q)$ care descriu câmpul gravitațional, iar $A^\alpha_\mu(x)$ sunt potențialele gauge interne asociate grupului $SU(n)$. Cantitățile g' şi g'' notează constantele de cuplaj ale interacțiunilor gravitațională şi respectiv a câmpurilor gauge interne.

În cazul particular al grupului $SU(2)\times SO(1,4)$, potențialele $A_\mu^\alpha(x)$ corespund stărilor de izospin, iar $A_{\mu\nu}^{ab}(x)$ se descompun în două părți: conexiunea de spin $\omega_\mu^{ij}(x)=\mathrm{A}_\mu^{ij}(x), i,j=0,1,2,3$ și tetrazii $e_\mu^i(x)=A_\mu^{i5}(x)$.

1.3. Obținerea expresiilor generale ale tensorilor asociați potențialelor gauge

Pentru a determina tensorii asociați câmpurilor gauge $A_{\mu\nu}^{ab}(x)$ și $A_\mu^\alpha(x)$, vom calcula comutatorul $[\nabla_\mu,\nabla_\nu]$. Folosind ecuațiile de structură (1.1) obținem [7]:

$$[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\Phi(x)=\left\{\frac{g'}{2}\left[\partial_\mu A_\nu^{ab}-\partial_\nu A_\mu^{ab}+g'\left(A_{c\mu}^a A_\nu^{cb}-A_{c\nu}^a A_\mu^{cb}\right)\right]\Sigma_{ab}+\right.$$
$$\left.+\left(\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+g''\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\nu^\beta A_\nu^\gamma\right)T_\alpha\right\}\Phi(x). \tag{1.3}$$

Dacă folosim definiția generală

$$[\nabla_\mu,\nabla_\nu]\Phi(x)=\left(\frac{g'}{2}F_{\mu\nu}^{ab}\Sigma_{ab}+g''G_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha\right)\Phi(x), \tag{1.4}$$

și identificăm ecuațiile (1.3) și (1.4), atunci rezultă

$$F_{\mu\nu}^{ab}=\partial_\mu A_\nu^{ab}-\partial_\nu A_\mu^{ab}+g'\left(A_{c\mu}^a A_\nu^{cb}-A_{c\nu}^a A_\mu^{cb}\right), \tag{1.7}$$

$$G_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^\alpha-\partial_\nu A_\mu^\alpha+g''\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\nu^\beta A_\nu^\gamma. \tag{1.6}$$

În cazul particular SU(2) $\times$SO(1,4), alegem $a=i,5; b=j,5; c=k,5$, cu $i,j,k=0,1,2,3$ și notăm $A_\mu^{i5}=2\lambda \mathrm{e}_\mu^{\mathrm{i}}$; atunci ecuația (2.6) devine[10]:

$$F_{\mu\nu}^{ij}=\partial_\mu A^{ij}-\partial_\nu A_\mu^{ij}+g'\left(A_{k\mu}^i A_\nu^{kj}-A_{k\nu}^i A_\mu^{kj}\right)-4\lambda^2 g'\left(e_\mu^i e_\nu^j-e_\nu^i e_\mu^j\right), \tag{1.7}$$

$$F_{\mu\nu}^i=\partial_\mu e_\nu^i-\partial_\nu e_\mu^i+g'\left(A_{k\mu}^i e_\nu^k-A_{k\nu}^i e_\mu^k\right). \tag{1.8}$$

Pentru un model Riemann-Cartan, cantitățile $F_{\mu\nu}^i$ sunt interpretate drept componentele torsiunii $T_{\mu\nu}^i$, iar $F_{\mu\nu}^{ij}$ - ale curburii $R_{\mu\nu}^{ij}$ spațiului-timp.

Obiectivul 2: Obținerea ecuațiilor de câmp pentru potențialele gauge

2.1. Construirea integralei acțiunii pentru potențialele gauge

Potențialele gauge $A_\mu^{ij}(x)$, $e_\mu^i(x)$ descriu câmpul gravitațional, iar $A_\mu^\alpha(x)$ - proprietățile interne (izoapinul, hipersarcina, etc.) ale sistemului fizic considerat. Tetrazii $e_\mu^i(x)$ pot fi folosiți pentru a defini un tensor metric:

$$g_{\mu\nu}=\eta_{ij}e_\mu^i e_\nu^j, \tag{2.1}$$

unde $\eta_{ij}=diag(1,1,1,-1)$ este metrica Lorentz.

Cu ajutorul potențialelor gauge construim integrala acțiunii pentru modelul considerat. Aceasta conține doi termeni, unul corespunzător sectorului $SO(p,q)$ și celălalt sectorului $SU(n)$:

$$S_{EYM}=\int d^4x\, e\left[-\frac{1}{16\pi G}F-\frac{1}{4Kg'^2}Tr\left(T_\alpha T_\beta\right)G_{\mu\nu}^\alpha G^{\beta\mu\nu}\right]. \tag{2.2}$$

În această expresie am folosit definițiile:

$$F=F_{\mu\nu}^{ij}\bar{e}_i^\mu\bar{e}_j^\nu, \quad e=\det\left(e_\mu^{\mathrm{i}}\right), \tag{2.3}$$

unde $\bar{e}_i^{\mu}(x)$ notează inversul lui $e_\mu^i(x)$, adică

$$e_\mu^i\,\bar{e}_i^{\nu}=\delta_\mu^\nu,\quad e_\mu^i\,\bar{e}_j^{\mu}=\delta_j^i. \tag{2.4}$$

În cele ce urmează vom alege $Tr(T_\alpha T_\beta)=K\delta_{\alpha\beta}$ şi $T_\alpha=\frac{1}{2}\sigma_\alpha$, unde σ_α sunt matricele lui Pauli. Constanta gravitațională G din (2.2) este singura cantitate dimensională, deoarece vom alege sistemul de unități $\hbar=c=1$.

2.2. Obținerea ecuațiilor de câmp prin metoda variațională

Impunem condiția $\delta S_{EYM}=0$ (principiul variațional) în raport cu potențialele $A_\mu^\alpha(x)$, $A_\mu^{ij}(x)$, $e_\mu^i(x)$. Atunci, obținem următoarele ecuații de câmp

$$\frac{1}{e}\partial_\mu\left(eG^{\alpha\mu\nu}\right)+\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}A_\mu^\beta G^{\gamma\mu\nu}=0, \tag{2.5}$$

$$F_\mu^i-\frac{1}{2}Fe_\mu^i=8\pi GT_\mu^i, \tag{2.6}$$

unde T_μ^i este tensorul energie-impuls [3, 7] al câmpurilor gauge $A_\mu^\alpha(x)$

$$T_\mu^i=\frac{1}{Kg'^2}\left(-G_{\mu\rho}^\alpha G_\alpha^{i\rho}+\frac{1}{4}e_\mu^i G_{\rho\lambda}^\alpha G_\alpha^{\rho\lambda}\right), \tag{2.7}$$

şi respectiv

$$F_{\mu\nu}^i=0. \tag{2.8}$$

În cazul grupului $SU(2)\times SO(1,4)$, ecuațiile (2.5) determină stările de izospin, cele din (2.6) corespund ecuațiilor lui Einstein, iar (2.8) arată că avem un spațiu fără torsiune. Ele sunt cunoscute sub denumirea de ecuațiile Einstein-Yang-Mills (EYM). Prin integrarea ecuațiilor EYM se obțin potențialele gauge ca soluții.

2.3. Formularea condiției de auto-dualitate

Se pot obține mai uşor soluții ale ecuațiilor de câmp dacă impunem condiția de auto-dualitate pentru tensorul câmpurilor gauge. Pentru aceasta definim tensorii duali

$$\widetilde{G}_{\mu\nu}^\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\alpha\rho\sigma}, \tag{2.9}$$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}^{ab}=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{ab\rho\sigma}, \tag{2.10}$$

unde $g=\det(g_{\mu\nu})$, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ este tensorul Levi-Civita complet anti-simetric ($\varepsilon_{0123}=+1$) şi

$$G^{\alpha\rho\sigma}=g^{\rho\tau}g^{\sigma\lambda}G_{\tau\lambda}^\alpha,\quad F^{ab\rho\sigma}=g^{\rho\tau}g^{\sigma\lambda}F_{\tau\lambda}^{ab}. \tag{2.11}$$

Atunci, condiția de auto-dualitate înseamnă satisfacerea relațiilor:

$$\widetilde{G}_{\mu\nu}^\alpha=iG_{\mu\nu}^\alpha,\quad \widetilde{F}_{\mu\nu}^{ab}=iF_{\mu\nu}^{ab}. \tag{2.12}$$

Acestea sunt ecuații diferențiale de ordinul întâi, spre deosebire de ecuațiile EYM care sunt de ordinul al doilea şi obținerea soluțiilor pentru ele este mai simplă. Orice soluție a ecuațiilor de auto-dualitate (2.12) este şi soluție a ecuațiilor EYM dar nu şi invers.

Obiectivul 3: Aplicații la cazul simetriei sferice

3.1. Obținerea unor soluții cu simetrie sferică

În cazul simetriei sferice spațiul-timp Minkowski este dotat cu metrica

$$ds^2=dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)-dt^2. \tag{3.1}$$

Vom prezenta trei exemple de soluții obținute pe baza rezultatelor anterioare.

1) **Soluții cu constantă cosmologică.**

Considerăm cazul când câmpurile gauge $SO(1,4)$ au forma [2, 3, 7]:

$$e^0_\mu = (A,0,0,0), \quad e^1_\mu = (0,B,0,0), \quad e^2_\mu = (0,0,rC,0), \quad e^3_\mu = (0,0,0,rC\sin\theta), \tag{3.2}$$

și

$$\begin{aligned} &A^{01}_\mu = (U,0,0,0), \quad A^{12}_\mu = (0,0,W,0), \quad A^{13}_\mu = (0,0,0,Z\sin\theta) \\ &A^{23}_\mu = (0,0,0,V\cos\theta), \quad A^{02}_\mu = A^{03}_\mu = (0,0,0,0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

unde A, B, C, U, V, Z și W sunt funcții numai de variabila r. În plus, vom parametriza câmpurile gauge $SU(2)$ astfel:

$$A = uT_3 dt + \mathrm{w}(Td\theta - \mathrm{T}_1 \sin\theta d\varphi) + T_3 \cos\theta d\varphi, \tag{3.4}$$

unde u și w sunt, de asemenea, funcții numai de r. Atunci. Considerând constrângerile $A = \frac{1}{B} = \sqrt{N}$, $C = 1$, unde $N(r)$ este o nouă funcție pozitiv definită, obținem:

$$\begin{aligned} &(N\mathrm{w}')' = \frac{\mathrm{w}(\mathrm{w}^2 - 1)}{r^2} - \frac{u^2 \mathrm{w}}{N}, \\ &(r^2 u')' = \frac{2u\mathrm{w}^2}{\mathrm{N}}, \\ &\frac{\mathrm{w}'^2}{\mathrm{r}} + \frac{u^2\mathrm{w}^2}{rN^2} = 0, \\ &\frac{1}{2}(rN' + N - 1) + \frac{r^2 u'^2}{2} + \frac{u^2 \mathrm{w}^2}{N} + N\mathrm{w}'^2 + \frac{(\mathrm{w}^2 - 1)}{2r^2} + \frac{\Lambda r^2}{2} = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

unde am folosit $K = \frac{1}{2}$ și unități $\frac{4\pi G}{\mathrm{g}''} = 1$. Aceste ecuații admit următoarea soluție (Schwarzschild-Reissner-Nordström-de-Sitter) de tipul black hole color [4,5,6]:

$$u(r) = u_0 + \frac{Q}{r}, \quad \mathrm{w}(r) = 0, \quad N(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2 + 1}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2, \tag{3.6}$$

unde $\Lambda = -12\lambda^2$ este constanta cosmologică. Ecuațiile (3.5) admit și soluția (Schwarzschild-deSitter) auto-duală:

$$u(r) = 0, \quad \mathrm{w}(r) = \pm 1, \quad N(r) = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \tag{3.7}$$

Spre deosebire de acesta, soluția (3.6) nu este auto-duală.

Prin contracția $\lambda \to 0$, grupul $SO(1,4)$ trece în grupul Poincaré cuplat cu grupul izospinului. Soluțiile ecuațiilor de câmp sunt date în acest caz de (3.6) și (3.7) în care trebuie să luăm $\Lambda = 0$. Deci, teoria gauge Poincaré nu admite o constantă cosmologică.

2) Model bazat pe grupul gauge cuantic $G \times SU(2)$

Grupul gauge gravitațional G are generatorii $P_\alpha = -i\partial_\alpha$, $\alpha = 1,2,3,0$, considerați ca operatori diferențiali și care comută între ei [12]:

$$\lfloor P_\alpha, P_\beta \rfloor = 0. \tag{3.8}$$

Generatorii grupului $SU(2)$ sunt notați prin T_a, $a = 1,2,3$ și satisfac relații de comutare ca în (1.1b). Câmpurile gauge interne și gravitaționale cu valori în algebra Lie sunt:

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a, \quad C_\mu(x) = C_\mu^\alpha(x) P_\alpha . \tag{3.9}$$

Alegem aceste câmpuri gauge cu simetrie sferică, de forma [1]

$$C_r^r = U(r), C_\theta^\theta = \frac{r-1}{rg}, C_\varphi^\varphi = \frac{r\sin\theta - 1}{rg\sin\theta}, C_t^t = -\frac{U(r)}{1-gU(r)}, A_r^t = V(r), \tag{3.10}$$

unde *U, V* sunt funcții numai de *r*, iar *g* este constanta de cuplaj gravitațională. Atunci, ecuațiile de câmp corespunzătoare sunt [1]:

$$(1-gU)(rV'' + 2V') - grVU'' - 2gVU' - 2grV'U' = 0 , \tag{3.11}$$

$$2grU'(1-gU)\_\,2U - gU^2 = 0 . \tag{3.12}$$

Soluția generală a ecuației (3.12) este [1]:

$$U(r) = \frac{1 \pm \sqrt{1+\frac{a}{r}}}{g} , \tag{3.13}$$

unde *a* este o constantă arbitrară de integrare. Alegând *a* = - 2*Gm*, soluția (3.13) conduce la metrica Schwarzschild [1]:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2Gm}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) - \left(1-\frac{2Gm}{r}\right)dt^2 . \tag{3.14}$$

Corespunzător, din (3.11) obținem două soluții pentru potențialele gauge *SU*(2):

$$V_1(r) = \sqrt{1+\frac{a}{r}}, \quad V_2(r) = \sqrt{\frac{r}{r+a}} . \tag{3.15}$$

Aceste rezultate arată că, în cazul considerat, există numai cuplaj gravitațional între câmpuri, dar nu şi cuplaje interne *SU*(2), deoarece soluțiile obținute nu conțin constanta de cuplaj a lui *SU*(2).

Modelul prezentat permite cuantificarea câmpului gravitațional prin metoda integralei funcționale [10] ca în cazul teoriilor gauge interne. Deoarece grupul gauge *G* se consideră aici ca o simetrie pur internă, proprietatea de re-normare este asigurată pentru modelul nostru gauge de unificare [1,10].

3) Soluție pentru câmpurile gauge pe spații-timp necomutative.

Presupunem că spațiul-timp este ne-comutativ, având coordonatele $x^\mu = (r, \theta, \varphi, t)$ care satisfac următoarele relații de comutare:

$$\left[x^\mu, x^\nu\right] = i\Theta^{\mu\nu} , \tag{3.16}$$

unde $\Theta^{\mu\nu} = -\Theta^{\nu\mu}$ sunt parametrii constanți ai modelului. Vom alege cazul ne-comutativității spațiu-spațiu [2], şi vom presupune că singurele componente ne-nule sunt $\Theta^{12} = -\Theta^{21} = \Theta$, unde Θ este un parametru constant de deformare. Pentru descrierea diferitelor câmpuri gauge folosim produsul star "*", definit prin relația [2, 3]:

$$(\Phi * \Psi)(x) = \Phi(x) e^{\frac{i}{2}\Theta^{\mu\nu}\bar{\partial}_\mu \otimes \bar{\partial}_\nu} \Psi(x) . \tag{3.17}$$

Presupunem apoi că grupul gauge este $SU(2) \times SO(1,4)$ şi notăm câmpurile (potențialele) gauge pe spațiul-timp ne-comutativ prin $\hat{A}_\mu^a(x), \hat{e}_\mu^i(x)$. Definim metrica spațiului-timp ne-comutativ prin relația:

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x, \Theta) = \frac{1}{2}\eta_{ij}\left(\hat{e}_\mu^j * \hat{e}_\nu^{j+} + \hat{e}_\mu^i * \hat{e}_\nu^{i+}\right) . \tag{3.18}$$

Folosind aplicația Seiberg-Witten [2, 3, 13], obținem următoarele corecții [2, 3]:

- pentru câmpurile gauge $SU(2)$ interne (cu soluția comutativă (3.7)):

$$\hat{A}_3^3 + \cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\ \Theta + O(\Theta^2),$$
$$\hat{A}_0^r = u_0 + \frac{Q}{r} + O(\Theta^2), \tag{3.19}$$

- pentru metrica Schwarzschild:

$$\hat{g}_{11} = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}} - \frac{\alpha(4\mathrm{r}-3\alpha)}{16r^2(\mathrm{r}-\alpha)^2}\theta^2 + O(\theta^4),$$
$$\hat{g}_{22} = r^2 + \frac{2\mathrm{r}^2 - 17\alpha\mathrm{r} + 17\alpha^2}{32r(\mathrm{r}-\alpha)}\theta^2 + O(\theta^4), \tag{3.20}$$
$$\hat{g}_{33} = r^2\sin^2\theta + \frac{(\mathrm{r}^2 + \alpha\mathrm{r} - \alpha^2)\cos^2\theta - \alpha(2\mathrm{r}-\alpha)}{16r(\mathrm{r}-\alpha)}\theta^2 + O(\theta^4),$$
$$\hat{g}_{00} = -\left(1-\frac{\alpha}{r}\right) - \frac{\alpha(8\mathrm{r}-11\alpha)}{16r^4}\theta^2 + O(\theta^4),$$

unde $\alpha = 2Gm$. Aceste soluții sunt utile pentru determinarea unor caracteristici cuantice ale găurilor negre (black holes) cum ar fi temperatura, entropia, etc.

3.2. Stabilirea condițiilor ca ecuațiile de câmp sa admită soluții ne-singulare

Construim integrala acțiunii câmpurilor gauge $e_\mu^i(x)$ sub forma [2, 14]:

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\left[F + \varphi_1(t)f_1(I_1) + \varphi_2(t)f_2(I_2) + V(\varphi_1,\varphi_{21})\right], \tag{3.21}$$

unde I_1 și I_2 sunt doi invarianți ai teoriei, iar $\varphi_1(t)$ și $\varphi_2(t)$ sunt multiplicatori Lagrange introduşi pentru a asigura existența unor soluții fără singularități. Potențialul $V(\varphi_1,\varphi_2)$ satisface condițiile:

$$f_1(I_1) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}, \quad f_2(I_2) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}. \tag{3.22}$$

O alegere corespunzătoare a funcțiilor $f_1(I_1)$ și $f_2(I_2)$ este [14]:

$$f_1(I_1) = I_1,\ \ f_2(I_2) = -\sqrt{I_2},\ I_1 = F - \sqrt{3}\left(4F_\mu^i F_i^\mu - F^2\right)^{1/2},\ \ I_2 = 4F_\mu^i F_i^\mu - F^2. \tag{3.23}$$

Cunoscând metrica spațiului-timp, cu relațiile (3.22) şi (3.23) determinăm funcțiile $f_1(I_1)$, $f_2(I_2)$ și potențialul $V(\varphi_1,\varphi_2)$.

3.3 Construirea soluțiilor gauge nesingulare. Vom considera cazul metricii Robertson-Walker $g_{\mu\nu} = diag\left(a(t)^2, r^2a(t)^2, r^2a(t)^2\sin^2\theta, -1\right)$ și vom presupune $\varphi_1(t) = 0$. Notăm $\varphi_2(t) = \varphi(t)$ și corespunzător $V(0,\varphi_2) = V(\varphi)$. Atunci, impunând principiul variațional $\delta \mathrm{S_g} = 0$ în raport cu $a(t)$ și $\varphi_2(t) = \varphi(t)$, obținem următoarele condiții care asigură existența soluțiilor ne-singulare:

$$H' \equiv \left(\frac{a'}{a}\right)' = -2\lambda^2\varphi, \quad \varphi'(t) = \frac{3H^2 - \lambda^2\varphi^2}{H}, \tag{3.24}$$

unde λ este parametrul de deformare [3, 4] al algebrei Lie [vezi (1.8)]. Aceste ecuații admit soluția periodică:

$$\varphi(t)=\varphi_0 \sin(\omega t),\ H(t)=\frac{\omega\varphi_0}{2\sqrt{3}}\left[\cos(\omega t)-1\right], \tag{3.25}$$

unde φ_0 este o constantă de integrare şi $\omega = 2\times 3^{1/4}\lambda$ este frecvenţa de oscilaţie a câmpului gravitaţional descris de câmpurile gauge $e^i_\mu(x)$ şi $A^{ab}_{\mu\nu}(x)$. Această soluţie nu are singularităţi şi este valabilă pentru cazul unei constante cosmologice negative: $\Lambda = -12\lambda^2 < 0$. Pentru a trata cazul unei constante cosmologice pozitive, trebuie să folosim grupul anti-de-Sitter $SO(2,3)$.

Este posibil să se obţină şi alte soluţii ne-singulare, presupunând o dependenţă de timp a „constantei" cosmologie. În mod analog se pot determina soluţii ne-singulare în cazul teoriilor gauge cu grupuri interne de simetrie.

Bibliografie

A. Lucrări proprii

- publicate în reviste indexate ISI:

1. G. Zet, V. Manta, C. Popa: Gauge Model Based on Group $G\times SU(2)$, Chin. Phys. Lett. Vol. **25** No.2 (2008) p. 433-435
2. M. Chaichian, A. Tureanu, G. Zet: Corrections to Schwarzschild solution in non-commutative gauge theory of gravitation, Phys. Lett. **B660** (2008) p. 573-578

- publicate în reviste indexate în baze de date internaţionale

3. G. Zet: Unified Gauge Theory on Non-commutative space-time, Rom. J. Phys. Vol. **53**, No. 5-6 (2008) p. 635-644
4. G. Zet, C. Popa: Spherical Gauge Gravitational Field and Spontaneous Symmetry Breaking, Rom. J. Phys. Vol. **53**, No. 5-6 (2008) p. 621-634
5. G. Zet, C. Popa, D. Partenie: Gauge Symmetry of Gravitation, Bul. Inst. Politehnic Iaşi, Tom **LIII** (**LVII**), fasc. 1-2, Secţia Matematică. Mecanică Teoretică. Fizică (2007) p.103-114
6. B. Ciobanu, I. Radinschi: Modeling the Electric and Magnetic Fields in Rotating Universe, Rom. J. Phys. Vol. **53**, No. 1-2 (2008) p. 405-416
7. G. Zet: Gauge Theory with $SU(n)\times SO(p,q)$ as structure group, Bul. Inst. Politehnic Iaşi, acceptată pentru publicare 2008

- prezentate la conferinţe naţionale şi internaţionale

8. G. Zet: General relativistic analog solutions for Yang-Mills theory on noncommutative space-time, Conferinţa Naţională de Fizică Teoretică (CNFT3) 10-13 Iunie 2008, Buşteni, Romania
9. G. Zet: U(2) gauge theory on non-commutativity geometry, Second Workshop on Quantum Gravity, 22-24 Septembrie 2008, Lusofona University, Lisbon
10. V. Chiriţoiu, G. Zet: Renormalization in Quantum Gauge Theory, Conferinţa Naţională de Fizică, 10-13 Septembrie 2008, Bucureşti-Măgurele

B. Lucrări ale altor autori

11. M Blagojevic: Gravitation and Gauge Symmetry. IOP Publishing 2008
12. N. Wu: Renormalizable Quantum Gauge Theory of Gravity, Commun. Theor. Phys. **38** (2002) p. 151-156
13. N.Seiberg, E. Witten: String Theory and Noncommutativity Geometry JHEP 9909 (2008) 032

C. Lucrări proprii publicate anterior

14. G. Zet, C.D. Oprişan, S. Babeţi: Solutions without singularities in gauge theory of gravitation, Int. J. Mod. Phys. **15C** (2004) p. 1031-1038