S I N T E Z A
lucrărilor efectuate pentru Etapa 2009 (unică) a proiectului
MODELE CLASICE ŞI CUANTICE PENTRU CÂMPURILE GAUGE,
Cod **ID – 620**, contract nr. 2/28.09.2007

Obiectivul 1. Construirea integralei acţiunii gauge invariantă

1.1.Calculul integralei acţiunii pentru câmpul scalar în prezenţa câmpurilor gauge

Câmpul gravitaţional poate fi descris ca şi celelalte câmpuri (electromagnetic de exemplu) în cadrul unei teorii gauge. În acest scop se pot folosi ca grupuri gauge (de simetrie locală) grupul Poincaré $ISO(3,1)$, grupul de-Sitter $SO(4,1)$ sau anti-de-Sitter $SO(4,1)$, grupul transformărilor afine $A(4,R)$, etc. Principala problemă care apare într-o astfel de teorie este cea a cuantificării câmpului gauge gravitaţional. Orice teorie cuantică, inclusiv pentru câmpul gravitaţional, trebuie să fie renormabilă. Această proprietate –de a fi renormabilă – constituie în prezent una dintre problemele cele mai importante pentru teoria cuantică a câmpului gravitaţional, care îşi aşteaptă încă rezolvarea.

O cale posibilă pentru obţinerea unei teorii cuantice a câmpului gravitaţional este aceea în care grupul gauge gravitaţional $[ISO(3,1), SO(3,2), etc.]$ se consideră ca un grup de simetrie pur internă [10]. Aceasta înseamnă că coordonatele spaţiului-timp vor rămâne nemodificate faţă de transformările grupului gauge, dar se vor modifica corespunzător formulele de transformare ale câmpurilor gauge şi materie.

În cadrul activităţilor de cercetare prevăzute în planul de realizare a proiectului nostru pentru etapa 2009/unică, am folosit ca grup de simetrie locală (gauge) o deformare a grupului de-Sitter $SO(4,1)$ determinată de un parametru real λ. Aceasta permite să se introducă în model şi constanta cosmologică Λ a cărei valoare este determinată tocmai de parametrul λ [1]. În limita $\lambda \to 0$ (proces care este numit contracţie a grupului) constanta cosmologică Λ se anulează iar grupul de-Sitter $SO(4,1)$ trece în grupul Poincaré $ISO(3,1)$. Aceasta înseamnă că o teorie gauge a câmpului gravitaţional bazată pe grupul Poincaré $ISO(3,1)$ [10] nu este adecvată pentru construirea unor modele cosmologice. De aceea, în lucrările noastre am folosit grupul de-Sitter (o deformare a sa) pentru a descrie gravitaţia printr-un model care să includă şi constanta cosmologică.

Generatorii infinitezimali ai grupului de-Sitter $SO(4,1)$ (în număr de 10) sunt $J_{ab} = -J_{ba}$, $a,b = 0,1,2,3,4,5$; în cele ce urmează vom folosi însă notaţiile $\Pi_\alpha \equiv J_{\alpha 5}$ şi $M_{\alpha\beta} \equiv J_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 0,1,2,3$, unde $L_{\alpha\beta}$ au semnificaţia operatorilor momentului cinetic, iar $\Sigma_{\alpha\beta}$ sunt operatorii de spin într-o reprezentare m-dimensională corespunzătoare câmpurilor materie considerate (notate mai jos prin φ_j, $j = 1,2,...,m$). În limita $\lambda \to 0$ generatorii Π_α trec în cei ai translaţiilor spaţio-temporale P_α care corespund la operatorii impulsului, iar $M_{\alpha\beta}$ rămân nemodificaţi, generează transformărilor Lorentz şi au semnificaţia operatorilor momentului cinetic total.

Considerăm apoi un multiplet de câmpuri materie φ_j, $j = 1,2,...,m$ a căror dinamică este descrisă de Lagrangianul $L_M(\varphi_j, \partial_\alpha \varphi_j)$ şi construim integrala acţiunii, pe care o presupunem invariantă global faţă de $SO(4,1)$, sub forma obişnuită

$$S_M = \int d^4x\, L_M(\varphi_j, \partial_\alpha \varphi_j), \tag{1}$$

unde $x = (x^\mu)$, $\mu = 0,1,2,3$ notează coordonatele spaţiului-timp Minkowski. Admitem apoi ca acţiunea S_M este invariantă şi faţă de transformările gauge (locale) ale grupului de-Sitter $SO(4,1)$. Spre deosebire de modelele considerate de alţi autori în mod obişnuit, vom scrie transformările de-Sitter (spaţio-temporale) ca transformări gauge pur interne [1], adică:

$$x^\alpha \to x'^\alpha = x^\alpha, \tag{2a}$$

$$\varphi_j(x) \to \varphi'_j(x) = ((1+\Theta)\varphi_j)(x), \tag{2b}$$

unde

$$\Theta = -[\varepsilon^{\gamma}(x) + \lambda^2 \varepsilon^{\beta}(x) t^{\gamma}_{\beta} + \omega^{\gamma\delta}(x) x_{\delta}]\partial_{\gamma} - \frac{i}{4}\omega^{\gamma\delta}(x)\Sigma_{\gamma\delta} + i\lambda\varepsilon^{\gamma}(x)\Sigma_{\gamma 5}$$
$$= i\varepsilon^{\gamma}(x)\Pi_{\gamma} - \frac{i}{2}\omega^{\gamma\delta}(x) M_{\gamma\delta} \tag{3}$$

Aici, cantitățile t^{α}_{β} depind numai de coordonatele spațiului-timp x^{μ}, $\mu = 0,1,2,3$ şi sunt date de expresia

$$t^{\gamma}_{\beta} = 2\eta_{\beta\delta} x^{\delta} x^{\gamma} - \sigma^2 \delta^{\gamma}_{\beta}; \quad \sigma^2 = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}, \tag{4}$$

$\eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)$ fiind metrica Minkowski. În ultima expresie a lui Θ din relația (3), mărimile $\varepsilon^{\gamma}(x)$ şi $\omega^{\gamma\delta}(x) = -\omega^{\delta\gamma}(x)$ notează parametrii infinitezimali (dependenți de coordonate) ai grupului gauge de-Sitter $SO(4,1)$.

Ca în orice teorie gauge, introducem câmpurile (potențialele) gauge gravitaționale $B^{\gamma}_{\alpha}(x)$ şi $B^{\gamma\delta}_{\alpha}(x) = -B^{\delta\gamma}_{\alpha}(x)$ care corespund la generatorii Π_{γ} şi respectiv $M_{\gamma\delta}$. Definim apoi derivata gauge covariantă

$$\nabla_{\alpha} = \partial_{\alpha} + B_{\alpha}, \quad B_{\alpha} = -iB^{\gamma}_{\alpha}\Pi_{\gamma} + \frac{i}{2} B^{\gamma\delta}_{\alpha} M_{\gamma\delta}. \tag{5}$$

Echivalent, această derivată se poate fi scrisă şi sub forma [1, 7, 9]

$$\nabla_{\alpha} = e^{\gamma}_{\alpha}\partial_{\gamma} + \frac{i}{4} B^{\gamma\delta}_{\alpha}\Sigma_{\gamma\delta} - i\lambda B^{\gamma}_{\alpha}\Sigma_{\gamma 5}, \tag{6}$$

unde

$$e^{\gamma}_{\alpha} = \delta^{\gamma}_{\alpha} + B^{\gamma}_{\beta} + \lambda^2 B^{\beta}_{\alpha} t^{\gamma}_{\beta} + B^{\gamma\delta}_{\alpha} x_{\delta}. \tag{7}$$

Formulele de transformare ale câmpurilor gauge B^{γ}_{α}, $B^{\gamma\delta}_{\alpha}$ şi implicit e^{γ}_{α} față de grupul gauge de-Sitter $SO(4,1)$ au fost obținute în lucrarea noastra [1].

Pentru ca integrala acțiunii (1) să rămână invariantă şi față de grupul gauge (local) de-Sitter trebuie să înlocuim în expresia Lagrangianului $L_M(\varphi_j, \partial_{\alpha}\varphi_j)$, presupus inițial invariant global, derivata obişnuită ∂_{α} prin derivata gauge covariantă ∇_{α} şi să introducem factorul $e^{-1} = \det\left(e^{-1\gamma}_{\ \varepsilon}\right)$ sub semnul integralei, unde $e^{-1\gamma}_{\ \varepsilon}$ notează matricea inversă a lui $\varepsilon^{\gamma}_{\alpha}$, adică $e^{\varepsilon}_{\alpha} e^{-1\gamma}_{\ \varepsilon} = \delta^{\gamma}_{\alpha}$. Aşadar, acțiunea extinsă minimal şi invariantă față de grupul gauge de-Sitter $SO(4,1)$ are expresia

$$S_M(\varphi_j; e) = \int d^4x\, e^{-1} L_M(\varphi_j(x), \nabla_{\alpha}\varphi_j(x)). \tag{8}$$

În particular, pentru un câmp materie scalar real $\varphi(x)$ de masă *m*, acțiunea invariantă față de grupul gauge de-Sitter (considerat ca grup de simetrie pur internă), are forma

$$S_M(\varphi; e) = \int d^4x\, e^{-1}\left(d_{\alpha}\varphi\, d^{a}\varphi - \frac{1}{2} m^2\varphi^2\right), \tag{9}$$

unde $d_{\alpha} = e^{\gamma}_{\alpha}\partial_{\gamma}$. Aici, $\nabla_{\alpha}\varphi$ se reduce la $d_{\alpha}\varphi$ deoarece câmpul scalar aparține reprezentării banale unitate.

1.2. Calculul integralei acțiunii pentru câmpul spinorial în prezența câmpurilor gauge

Conceptul de simetrie $SO(4,1)$ pur internă împreună cu principiul gauge ne permit să descriem, ca şi anterior, cuplajul minimal dintre un câmp spinorial şi câmpurile gauge gravitaționale. Conform conceptului de simetrie $SO(4,1)$ pur internă, câmpurile gauge şi transformările lor nu interferă cu structura spațiului-timp fixat apriori prin convenția facută (simetrie pur internă) şi geometria corespunzătoare acestui spațiu rămâne separată de fizica descrisă de câmpurile gauge $SO(4,1)$.

Considerăm acum un câmp spinorial $\psi(x)$ de masă *m*. Acțiunea invariantă global față de grupul $SO(4,1)$ este dată de expresia

$$S_M = \int d^4x\left[\frac{i}{2}\overline{\psi}\,\gamma^{\alpha}(\partial_{\alpha}\psi) - \frac{i}{2}(\partial_{\alpha}\overline{\psi})\gamma^{\alpha}\psi - m\overline{\psi}\psi\right]. \tag{10}$$

Aici, γ^{α} sunt matricile Dirac care satisfac algebra Clifford obişnuită $\{\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}\} = 2\eta^{\alpha\beta}$, iar operatorii de spin au expresiile $\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}]$.

Având în vedere ipoteza cuplajului minimal admisă anterior, putem scrie acțiunea gauge invariantă pentru câmpul spinorial $\psi(x)$ sub forma

$$S_M(\psi,\overline{\psi};e,B)=\int d^4x\, e^{-1}\left[\frac{i}{2}\overline{\psi}\,\gamma^\alpha(\nabla_\alpha\psi)-\frac{i}{2}(\nabla_\alpha\overline{\psi})\gamma^\alpha\psi-m\overline{\psi}\psi\right]. \tag{11}$$

Datorită faptului că $\psi(x)$ este un câmp spinorial, în expresia acțiunii (11) intră acum şi câmpurile gauge gravitaționale B^γ_α şi $B^{\gamma\delta}_\alpha$ prin intermediul derivatei gauge covariante ∇_α.

1.3. Calculul integralei acțiunii pentru câmpul vectorial cu masă nenulă în prezența câmpurilor gauge

Considerăm acum cazul unui câmp vectorial $A_\mu(x),\ \mu=0,1,2,3$ cu masă nenulă m. Integrala acțiunii invariantă global față de grupul de-Sitter $SO(4,1)$ are expresia

$$S_M=\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}m^2A_\alpha A^\alpha\right],$$

unde $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A-\partial_\beta A_\alpha$ este tensorul asociat câmpului vectorial $A_\alpha(x)$. În particular, putem considera câmpurile gauge $A_\alpha(x)=A^k_\alpha(x)T_k$, cu valori în algebra Lie, asociate unui grup de simetrie internă, de exemplu $SU(n)$, având generatorii infinitezimali $T_k,\ k=1,2,...,N$. Operatorii de spin au în acest caz expresiile $(\Sigma_{\alpha\beta})^{\gamma\delta}=2i(\eta^\gamma_\alpha\eta^\delta_\beta-\eta^\delta_\alpha\eta^\gamma_\beta)$ corespunzătoare reprezentării vectoriale a grupului de-Sitter. Integrala acțiunii gauge invariantă față de grupul de simetrie de-Sitter corespunzătoare cuplajului minimal va avea expresia

$$S_M(A;e,B)=\int d^4x\left[-\frac{1}{4}\widetilde{F}_{\alpha\beta}\widetilde{F}^{\alpha\beta}+\frac{1}{2}m^2A_\alpha A^\alpha\right], \tag{12}$$

unde $\widetilde{F}_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha A_\beta-\nabla_\beta A_\alpha$. Pentru câmpul vectorial $A_\alpha(x)$ derivata gauge covariantă are forma $\nabla_\alpha A_\beta=d_\alpha A_\beta-B^\gamma_{\alpha\beta}A_\gamma+\lambda B^\gamma_\alpha A_\gamma$. Dacă $A_\alpha(x)$ este câmpul gauge $U(1)$ atunci formula sa de transformare față grupul $U(1)$ este $A_\alpha\to A_\alpha+\nabla_\alpha\theta(x)$, unde $\theta(x)$ este parametrul (dependent de coordonate) la lui $U(1)$. Trebuie subliniat însa că tensorul $\widetilde{F}_{\alpha\beta}$ nu este în general invariant $U(1)$.

In cazul unei teorii gauge definită pe un spațiu-timp ne-comutativ (NC) [5, 6] am folosit produsul-star $*$ covariant [4] între câmpuri. Integrala acțiunii câmpurilor gauge $A_\alpha(x)$ are expresia

$$S_{NC}=-\frac{1}{2g^2}\int d^4x\hat{G}^{\alpha\beta}*\hat{F}_{\beta\gamma}*G^{\gamma\delta}*\hat{F}_{\delta\alpha}, \tag{13}$$

unde $\hat{G}^{\alpha\beta}$ notează metrica gauge covariantă pe spațiul-timp NC, $\hat{F}_{\alpha\beta}$ este tensorul câmpurilor gauge $A_\alpha(x)$, iar g este constanta de cuplaj gauge. Pentru un câmp materie scalar $\varphi(x)$ integrala acțiunii care conduce la un model renormabil la toate ordinile într-o teorie perturbativă are forma [15]

$$S_\varphi=\int d^4p\left(\frac{1}{2}p_\alpha\varphi\, p^\alpha\varphi+\frac{1}{2}\left(m^2\varphi\varphi+a\frac{1}{\theta^2p^2}\right)\varphi\varphi+\frac{f}{4!}\varphi*\varphi*\varphi*\varphi\right).$$

Aplicații la cazul câmpurilor gauge cu simetrie sferică sunt prezentate în lucrările noastre [2, 3, 4, 8].

Obiectivul 2. Calculul funcției de partiție materie în prezența câmpurilor gauge

2.1. Obținerea funcției de partiție cu o buclă pentru câmpul scalar în prezența câmpurilor gauge

În cadrul lucrărilor noastre am determinat funcția de partiție $Z_\varphi[e]$ cu o buclă şi am studiat comportarea acesteia față de o transformare de scală (rescalare). Contribuția câmpului scalar $\varphi(x)$ la funcția de partiție este dată de expresia [11] este dată de expresia

$$Z_\varphi[e]=\int D\varphi\, e^{iS_M(\varphi;e)}, \tag{14}$$

unde $S_M(\varphi;e)$ este acțiunea gauge invariantă față de grupul de-Sitter pentru câmpul scalar $\varphi(x)$ dată de formula (9). Efectuând o integrare prin părți formula (9) poate fi scrisă sub forma

$$S_M(\varphi;e)=\frac{1}{2}(\varphi,M_\varphi(e)\varphi), \tag{15}$$

unde $M_{\varphi}(e)=-\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}-m^2$ este operatorul hiperbolic al fluctuațiilor de câmp. În relația (15) simbolul (χ,φ) notează produsul scalar în spațiul funcțiilor scalare reale: $(\chi,\varphi)\int d^4x e^{-1}\chi\varphi$. După o integrare Gaussiană expresia (15) poate fi adusă la forma standard

$$Z_{\varphi}[e]=\exp\left[\frac{1}{2}\ln\det M_{\varphi}(e)\right]. \tag{16}$$

Pe de altă parte, determinantul funcțional [12] al unui operator M se poate exprima cu ajutorul funcției zeta generalizată ζ asociată cu ajutorul formulei:

$$\ln\det M=-\lim_{u\to 0}\frac{d}{du}\zeta(u;\mu;M), \tag{17}$$

unde, prin definiție, $\zeta(u;\mu;M)=\mu^{2u}trM^{-u}$ iar μ este un factor de scală. Aplicând acest rezultat pentru operatorul $M_{\varphi(e)}$, putem scrie (introducând factorul de fază μ)

$$Z_{\varphi}[\mu;e]=\exp[\zeta'(0;\mu;M_{\varphi}(e))]. \tag{18}$$

Efectuând transformarea de scală $\mu\to\tilde{\mu}=\lambda\mu$, funcția de partiție Z_{φ} devine [7, 9]

$$Z_{\varphi}[\tilde{\mu};e]=Z_{\varphi}[\mu;e]\exp[\ln\lambda\,\zeta(0;\mu;M_{\varphi}(e))]. \tag{19}$$

Pe de altă parte, funcția $\zeta(u;\mu;M)$ poate fi exprimată şi ca transformata Mellin a nucleului de căldură (heat kernel) [13]

$$\zeta(u;\mu;M)=\frac{i\mu^{2u}}{\Gamma(u)}\int_0^{\infty}ds(is)^{u-1}Tr\exp(isM). \tag{20}$$

Folosind această expresie se obține următoarea proprietate de transformare a funcției ζ la schimbarea de scală $\mu\to\tilde{\mu}=\lambda\mu$ [9]

$$\zeta'(0;\tilde{\mu};M)=\zeta'(0;\mu;M)+2\ln\lambda\,\zeta(0;\mu;M). \tag{21}$$

Acest rezultat arată că transformarea determinantului functional [vezi definiția (17)] față de rescalare este complet determinată de $\zeta(0;\mu;M)$. Aşadar, pentru a analiza proprietatea de renormare a teoriei gauge formulate este necesar să calculăm funcția $\zeta(0;\mu;M)$ pentru cazul când M este unul din operatorii specifici modelului nostru: $M_{\varphi}(e)$ - pentru câmpul scalar [vezi (15)], $M_{\psi}(e,B)$ - pentru câmpul spinorial [vezi (23)], sau $M_F(e,B)$ - pentru cazul câmpului vectorial [vezi (29)]. Acest lucru va fi prezentat în cadrul **Obiectivului 3. Studiul proprietății de renormare a teoriei formulate** ale cărui rezultate sunt expuse mai jos.

2.2. Obținerea funcției de partiție cu o buclă pentru câmpul spinorial în prezența câmpurilor gauge

În cazul câmpului spinorial $\psi(x)$ funcția de partiție este dată de integrala funcțională Grassmann [7]

$$Z_{\psi}[e,B]=\int D\overline{\psi}\,D\psi\exp[iS_M(\psi,\overline{\psi};e,B)], \tag{22}$$

unde $S_M(\psi,\overline{\psi};e,B)$ este acțiunea gauge invariantă din (11). Efectuând apoi o integrare Grassmann, obținem

$$Z_{\psi}[e,B]=\exp\left[\frac{1}{2}\ln\det M_{\psi}(e,B)\right], \tag{23}$$

unde operatorul hiperbolic de fluctuații este acum de forma [9]

$$M_{\psi}(e,B)=-D_{\alpha}D^{\alpha}+\frac{i}{2}F_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}-m^2. \tag{24}$$

Aici $D_{\alpha}=\nabla_{\alpha}+B_{\alpha}$ şi $F_{\alpha\beta}$ este 2-forma de curbură a câmpurilor gauge $SO(4,1)$ $B_{\alpha}^{\gamma}(x)$ şi $B_{\alpha}^{\gamma\delta}(x)=-B_{\alpha}^{\delta\gamma}(x)$ [9]. Folosind din nou definiția (17), putem deduce din (23) contribuția câmpului spinorial la funcția de partiție normată la factorul de scală μ

$$Z_{\psi}[\mu;e,B]=\exp\left[-\frac{1}{2}\zeta'(0;\mu;M_{\psi}(e,B))\right], \tag{25}$$

exprimată cu ajutorul funcției ζ.

Cu ajutorul proprietății (21) deducem următoarea formulă de transformare a lui $Z_{\psi}[\mu;e,B]$ la o schimbare de scală $\mu\to\tilde{\mu}=\lambda\mu$

$$Z_{\psi}[\tilde{\mu};e,B]=Z_{\psi}[\mu;e,B]\exp[-\ln\lambda\,\zeta(0;\mu;M_{\psi}(e,B))]. \quad (26)$$

Pentru a analiza proprietatea de renormare a teoriei gauge formulate trebuie deci să determinăm funcția $\zeta(0;\mu;M_{\psi}(e,B))$. Acest lucru va fi prezentat în cadrul **Obiectivului 3** unde studiem proprietatea de renormare cu ajutorul funcției de partiție cu o buclă pentru câmpul spinorial.

2.3. Obținerea funcției de partiție cu o buclă pentru câmpul vectorial cu masă nenulă în prezența câmpurilor gauge

Contribuția unui câmp vectorial A_{α} de masă nenulă *m* la funcția de partiție are expresia

$$Z_{A}[e,B]=\int DA_{\alpha}\exp[iS_{M}(A;e,B)], \quad (27)$$

unde $S_{M}(A;e,B)$ este acțiunea gauge invariantă a acestui câmp în prezența câmpurilor gauge [vezi ecuația (13)]. Pentru calculul acestei funcționale, folosim metoda Fadeev-Popov [12[. Pentru aceasta alegem un etalon determinat de o condiție gauge $F[A_{A}^{\theta}]=G(x)$ și inserăm unitatea $1=\int D\theta\, DA_{\alpha}\,\delta(F[A_{A}^{\theta}]-G(x))\det M_{F}(A)$ în expresia (27). Obținem astfel

$$Z_{A}[e,B]=\int D\theta\, DA_{\alpha}\,\delta(F[A_{\alpha}^{\theta}]-G(x))\det M_{F}(A)\exp[iS_{M}(A;e,B)]. \quad (28)$$

Deoarece determinantul Fadeev-Popov $M_{F}(A)$ este gauge invariant, în (28) putem face transformarea $A_{\alpha}\to A_{\alpha}+\nabla_{\alpha}\theta$ fără a afecta rezultatul. Particularizând condiția gauge de mai sus sub forma $F[A_{\alpha}^{\theta}]=-\nabla_{\alpha}A^{\alpha}$, operatorul Fadeev-Popov devine $M_{F}(e,B)=-\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}$ integrala (28) devine Gussiană şi poate fi calculată obținându-se

$$Z_{A}[e,B]=\det M_{F}(e,B)\exp\left[-\frac{1}{2}\ln\det M_{F}(e,B)\right]. \quad (29)$$

Ca şi în celelalte două cazuri, putem arăta că transformarea aceastei funcționale la o schimbare de scală $\mu\to\tilde{\mu}=\lambda\mu$ este complet determinată de funcția zeta $\zeta(0;\mu;M_{F}(e,B))$. Calculul acesteia din urmă este prezentat mai jos în cadrul **Obiectivului 3**.

Obiectivul 3. Studiul proprietății de renormare a teoriei formulate

3.1. Analiza proprietății de renormare

Calcularea acțiunii cuantice efective pentru diferite tipuri de câmpuri care să fie regularizată şi renormată la nivelul uni-buclă se poate efectua întrebuințând metoda funcției ζ generalizate [1, 9]. În multe cazuri (de exemplu în calculul acțiunii efective) această metodă conduce în mod natural la anularea divirgențelor menținând termenii fizici necesari în rezultatul final. Dacă considerăm cazul particular al unui câmp scalar $\varphi(x)$ pentru care avem definit operatorul hiperbolic al fluctuațiilor $M_{\varphi}(e)$, atunci acțiunea efectivă este dată de derivată funcției ζ corespunzătoare calculată în $u=0$ [14]

$$S_{eff}[\varphi,e]=\frac{1}{2}\frac{d}{du}\zeta(u;\mu;M_{\varphi}(e))_{|u=0}. \quad (30)$$

Este foarte important de remarcat că există o legătură importantă între prezența unor poli în funcția ζ şi coeficienții $c_{k}(x),\,k=0,1,2,.....$ ai nucleului de căldură (heat kernel) $K(u;x,y)$. Folosind aceste proprietăți, prezentăm rezultatele obținute de noi pentru coeficienții c_{1}, c_{2} $(c_{0}=1)$ şi determinăm acțiunea efectivă minimală a câmpurilor scalare, spinoriale şi vectoriale cu masă nenulă care este compatibilă cu cerințele de renormare pană la nivelul uni-buclă.

3.2. Obținerea termenilor de anomalie

Pentru calculul lui $\zeta(0;\mu;M)$, care determină complet transformarea funcției de partiție, folosim expresia funcției ζ dată în (20). Introducând apoi rezultatul obținut în expresia integralei funcționale şi luând limita $u\to 0$ se obțin termeni singulari care constituie anomaliile modelului considerat. Renormarea oricărei teorii care include câmpuri gauge dinamice cere ca aceste anomalii, care sunt expresii polinomiale în câmpurile gauge (în cazul nostru e_{α}^{γ} şi $B_{\alpha}^{\gamma\delta}$) şi derivatele lor, să poată fi absorbite în acțiunea clasică a acestor câmpuri gauge. Aşadar, pentru determinarea explicită a dinamicii câmpurilor gauge consistentă cu renormarea trebuie în final să evaluăm diferite funcții ζ .

Vom scrie operatorul de fluctuație sub forma generală $M = D_\alpha D^\alpha + E$, $D_\alpha = \nabla_\alpha + N_\alpha$ unde E și N_α sunt operatori ale căror expresii depind de tipul câmpului considerat (scalar, spinorial, vectorial). Precizăm că tensorul $F_{\alpha\beta}$ al câmpurilor gauge SO(4,1) are componentele: $F^\gamma_{\alpha\beta} \equiv T^\gamma_{\alpha\beta}$; $F^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \equiv R^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ (notațiile arată legătura cu modelel geometrice definite pe spații-timp Riemann-Cartan cu torsiune $T^\gamma_{\alpha\beta}$ și curbură $R^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$). În cercetările noastre am considerat numai cazul $T^\gamma_{\alpha\beta} = 0$, adică având torsiunea nulă.

Nucleul de căldură $K(u;x,y)$ satisface ecuația

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + M_x\right)K(u;x,y) = 0\,, \tag{31}$$

unde M_x notează derivata lui M în raport cu x. Pentru $y \to x$ și $u \to 0$ putem admite dezvoltarea asimptotică

$$K(u;x,y) \approx \frac{i}{(4\pi u)^{d/2}} e^{-\frac{r^2(x,y)}{4u}} \sum_{k=0}^{\infty} u^k c_k(x,y)\,. \tag{32}$$

Aici *d* notează dimensiunea spațiului-timp care în cazul nostru va fi luată *d* = 4. Expresiile pentru funcția $r^2(x,y)$ pentru și coeficienții $c_k(x,y)$ în limita $y \to x$ se calculează ipunând condiția ca (32) să verifice ecuația (31). Printr-un calcul direct dar foarte laborios am obținut expresiile

$$\begin{aligned} &c_1(x) = -\frac{1}{6}R - E, \quad c_2(x) = -\frac{1}{30}\nabla_\alpha \nabla^\alpha R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{72}R_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} R_{\gamma\delta}{}^{\gamma\delta} + \frac{1}{180}R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &-\frac{1}{180}R_{\alpha\gamma}{}^{\alpha}{}_{\delta} R_{\beta}{}^{\gamma\beta\delta} + \frac{1}{12}\widetilde{F}_{\alpha\beta}\widetilde{F}^{\alpha\beta} + \frac{1}{6}R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}E - \frac{1}{6}\left[D_\alpha,\left[D^\alpha, E\right]\right] + \frac{1}{2}E^2 \end{aligned} \tag{33}$$

unde $\widetilde{F}_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha + \left[A_\alpha, A_\beta\right]$.

Deoarece anomaliile provin din regiune valorilor mici pentru *u* ($u \to 0$), putem folosi dezvoltarea asimptotică din (32) a nucleului de căldură. Efectuarea integrării în raport cu *u* în (20) și păstrând numai contribuția $k = \frac{1}{2}$ din suma după *k*, obținem în final

$$\zeta(0;\mu;M) = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int d^d e^{-1} Tr c_{\frac{d}{2}}(x)\,. \tag{34}$$

3.3. Aplicarea rezultatelor obținute la câmpurile scalare, spinoriale și vectoriale

În cazul câmpului scalar operatorul de fluctuație $M_\varphi(e)$ se obține luând în expresia lui *M* de mai sus: $E = -m^2$ și $N_\alpha = 0$. Folosind (34) calculăm $\zeta(0;\mu;M_\varphi(e))$ și apoi introducând expresia obținută în (18) obținem termenul de anomalie pentru câmpul scalar. Pentru câmpurile scalare metoda de calcul este analogă, dar operatorii E și N_α au forme specifice acestor cazuri. De exemplu, pentru câmpul spinorial avem $N_\alpha = \frac{i}{4}\Sigma_{\beta\gamma}\left(B^{\beta\gamma}_\alpha + T_\alpha{}^{\beta\gamma}\right)$, expresie care devine mai simplă în cazul $T_\alpha{}^{\beta\gamma} = 0$ (torsiune nulă). Rezultatele complete sunt conținute în lucrările noastre [1, 7, 9].

Cunoscând aceste rezultate putem construi acțiunea minimală pentru câmpurile gauge. Ca în orice dinamică clasică pentru câmpuri gauge consistentă cu renormarea, sunt prezenți termenii de anomalie. În modelul nostru, pentru $T_\alpha{}^{\beta\gamma} = 0$, acțiunea clasică minimală a câmpurilor gauge e^γ_α și $B^{\gamma\delta}_\alpha$ asociate grupului $SO(4,1)$ trebuie să conțină următorii termeni, dacă neglijăm divirgențele totale [7]

$$S_{gauge}(e,B) = \int d^4x \left[-\frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) + aR^2 + bR_{\alpha\gamma}{}^{\alpha}{}_{\delta} R_{\beta}{}^{\gamma\beta\delta} + cR_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}\right]. \tag{35}$$

Aici, *G* este constanta gravitațională, iar a,b,c sunt constante de cuplaj. Se observă că folosirea grupului gauge $SO(4,1)$ introduce automat constanta cosmologică, a cărei valoare este $\Lambda = -12\lambda^2$ [1, 9]. Subliniem că S_{gauge} din (35) este invariantă, pe de o parte, în raport cu transformările gauge (locale) și, pe de altă parte în raport cu grupul Poincaré global specifică pentru un spațiu-timp Minkowski.

Bibliografie

A. Lucrări proprii

în reviste indexate ISI

1. C. Chirițoiu, G. Zet: Towards a quantization of gauge fields on de Sitter group by functional integral method, Eur. Phys. J. **C57** (2008) p. 809-815
2. M. Chaichian, A. Tureanu, M. Setare, G. Zet: On black holes and cosmological constant in noncommutative gauge theory of gravity, Journal of High Energy Physics (JHEP) **04** (2008) 064/p. 1-17
3. M. Chaichian, M. Oksanen, A. Tureanu, G. Zet: Gauging the twisted Poincaré symmetry as a noncommutative theory of gravitation, Phys. Rev. **D79** (2009) 044016/p.1-8
4. M. Chaichian, A. Tureanu, G. Zet: Gauge field theories with covariant star-product, Journal of High Energy Physics (JHEP) **07** (2009) 084/p. 1-12

în reviste indexate în baze de date internaționale

5. G. Zet: Gauge theories on noncommutative space-time, Annals Univ. Craiova Physics AUC, Vol. **18** (2008) p. 106-119
6. G. Zet: General relativistic analog solutions for Yang-Mills theory on noncommutativity space-time, Rom. J. Phys. Vol.**53**, nr. 9-10 (2008) p. 1219-1229
7. V. Chirițoiu, G. Zet, Regularization in quantum theory of gravity with de Sitter inner symmetry, Rom. J. Phys. Vol.**54**, nr. 9-10 (2009)
8. G. Zet: Self-dual gauge fields on noncommutative space-time, Bul. Inst. Politehnic Ia□i, Sec□ia Matematică. Mecanică Teoretică. Fizică, fascicola 1, Tom LV (LIX) (2009) p. 33-38

în Proceedings indexate în baze de date internaționale ale unor Conferințe internaționale

9. V. Chirițoiu, G. Zet, Renormalization in quantum gauge theory using zeta-function, Proceedings of the Physics Conference TIM-08, Springer Verlag, Berlin, Vol. 1131 (2008) p. 55-60

B. Lucrări ale altor autori

10. C. Wiesendanger: Poincaré gauge invariance and gravitation in Minkowski spacetime, Class. Quant. Grav. **13** (1996) p. 681-700
11. N. D. Birrell and P. C. W. Davies: Quantum fields in curved space,Cambridge University Press, 1982, p. 28
12. L. D. Fadeev and A. A. Slavnov: Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1986
13. Ch. Bär and S. Moroianu: Heat kernel asymptotics for roots of generalized Laplacians, Int. J. Mathematics 14 (2003) p.397-412
14. V. Moretti, D. Iellici: ζ-function regularization and one-loop renormalization of field fluctuations in curved space-times, Phys. Lett. **B425** (1998) p. 33-40
15. R. Gurau, J. Magnen, V. Rivasseau, A. Tanasa: A translation-invariant renormalizable non-commutative scalar model, Commun. Math. Phys. **287** (2009) p.275-290