

Obiectivul 1. Elaborarea unor programe de calcul analitic pentru studiul câmpurilor gauge definite pe spații-timp commutative și necommutative

1.1. Realizarea subrutinei de calcul pentru tensorul câmpurilor gauge

A. Cazul câmpurilor gauge definite pe spații-timp commutative

S-a considerat un sistem de câmpuri fizice $\phi_i(x), i = 1, 2, \dots, m, x = (x^\mu)$ - coordonatele spațiului-timp M , descris de un Lagrangian $L = L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \mu = 0, 1, 2, \dots, D-1$ care este invariant global față de transformările unui grup Lie G . Generatorii infinitesimali $T_a, a = 1, 2, \dots, n$ satisfac ecuațiile

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c, \quad (1)$$

unde $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$ sunt constantele de structură ale grupului G , iar câmpurile $\phi_i(x)$ aparțin unei reprezentări m -dimensională a grupului G . Admițând apoi că G este un grup gauge de simetrie (locală), trebuie să introducem câmpurile gauge asociate $A_\mu^a(x)$, care sunt componente ale 1-formei potențial cu valori în algebra Lie $A = A_\mu^a(x) T_a dx^\mu$. S-a definit apoi 2-forma de curbură

$$F = dA - \frac{i}{2} [A, A], \quad (2)$$

de unde rezultă următoarea expresie pentru componentele sale

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3)$$

unde g este constanta de cuplaj gauge.

Integrala acțiunii asociată câmpurilor gauge $A_\mu^a(x)$ are expresia

$$S_g = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (4)$$

din care se obțin ecuațiile de câmp impunând principiul acțiunii minime.

În orice aplicație concretă este necesar să se calculeze mai întâi componentele $F_{\mu\nu}^a(x)$ ale tensorului câmpurilor gauge $A_\mu^a(x)$. Chiar în cazurile simple, calculul acestor componente este foarte laborios și acest lucru impune folosirea unor programe de calcul analitic. În acest scop am realizat mai multe subrutine de calcul, adecvate pentru Programul MAPLE. Acestea dau posibilitatea să se introducă componentele câmpurilor gauge pentru diferite situații privind domeniul de valori ale indicelui spațial μ și ale indicelui de grup a , adică în funcție de dimensiunea spațiului-timp M și cea a grupului gauge G .

Dacă dimensiunea grupului gauge care se consideră în aplicațiile programului este egală cu cea a spațiului-timp, componentele câmpurilor (potențialelor) gauge $A_\mu^a(x)$ se introduc direct prin instrucțiunile:

```
> grdef('A^{a miu niu}'); > grcalc(A(up,dn,dn)); > grdisplay(_);
```

Având aceste componente, programul permite să se calculeze apoi componentele tensorului $F_{\mu\nu}^a$ asociat câmpurilor gauge, folosind definiția (3):

```
> grdef('f^{a b c}');  
> grdef('F^{a miu niu} := A^{a niu, miu} - A^{a miu, niu} - f^{a b c} * A^{b miu} A^{c miu}');
```

Dacă dimensiunea grupului gauge diferă de cea a spațiului-timp, diferitele mărimi se introduc separat pentru fiecare câmp gauge, adică $A_\mu^1, A_\mu^2, \dots, A_\mu^n$ și respectiv $F_{\mu\nu}^1, F_{\mu\nu}^2, \dots, F_{\mu\nu}^n$, prin aceleași instrucțiuni. Totuși, în lucrările noastre am elaborat și un program care permite să se introducă direct aceste mărimi chiar în cazul când cele două

dimensiuni diferă [4]. În acest scop am folosit posibilitatea programului MAPLE de a lucra cu string-uri. De exemplu, pentru introducerea componentelor câmpurilor gauge $A_\mu^a(x)$ s-au folosit instrucțiunile:

```
> with(StringTools);
> for a from 1 to n do
> X = cat('A',a, '{miu}'): grdef(X): grcalc(X): grdisplay(_):
> end do;
```

Componentele tensorului $F_{\mu\nu}^a(x)$ asociat se calculează apoi folosind definiția (3) și aceleași facilități oferite de "StringTools". Programul complet este prezentat în lucrarea [4].

Ca un exemplu de aplicare a acestei proceduri, s-a construit un model cu simetrie sferică pentru care grupul gauge este $G \times SU(2)$, adică acest grup este produsul direct dintre grupul gauge gravitațional G și grupul $SU(2)$ [vezi **Obiectivul 2**].

B. Cazul câmpurilor gauge definite pe spații-timp ne-comutative

În acest caz, coordonatele spațiului-timp nu mai comută între ele, satisfăcând relațiile

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}(x), \quad (5)$$

unde $\theta^{\mu\nu}(x) = -\theta^{\nu\mu}(x)$ este un bi-vector [2, 3]. Pentru a dezvolta o teorie gauge pe un astfel de spațiu, se introduce un nou produs între câmpurile fizice sau diferite funcții, notat prin simbolul „*” și numit *produs star*. Deoarece componentele câmpurilor gauge și ale tensorului asociat formează forme diferențiale exterioare cu valori în algebra Lie, am definit produsul star pentru astfel de mărimi [2, 9]:

$$\alpha * \beta = \alpha \wedge \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^n C_n(\alpha, \beta). \quad (6)$$

Aici, simbolul „ \wedge ” notează produsul exterior, iar $C_n(\alpha, \beta)$ sunt operatori bi-lineari care se aleg astfel încât să fie satisfăcută proprietatea de asociativitate a produsului star. Tensorul câmpurilor gauge are acum o expresie asemănătoare cu cea din (2), dar comutatorul se scrie folosind produsul star [2,3]

$$[\alpha, \beta]_* = \alpha * \beta - (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta * \alpha, \quad (7)$$

unde $|\alpha|$ și $|\beta|$ notează gradul celor două forme diferențiale α și respectiv β . În subrutina de calcul trebuie deci să introducem mai întâi operatorii bi-lineari $C_n(\alpha, \beta)$, apoi componentele câmpurilor gauge $\hat{A}_\mu^a(x)$, după care să calculăm tensorul asociat $\hat{F}_{\mu\nu}^a(x)$. Prin simbolul „ $\hat{}$ ” pus deasupra unor mărimi se notează expresiile lor în teoria gauge pe spațiul-timp ne-comutativ. Aceste mărimi s-au calculat pentru cazul teoriei gauge $U_*(2)$ folosind aplicația Seiberg-Witten [2]. În ordinul întâi $O(\hbar)$ ele au expresiile [2, 10]

$$A_\mu^{(1)} = -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma} \{A_\rho, \nabla_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}\}, \quad (8)$$

$$F_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma} \left(\{A_\rho, \nabla_\sigma F_{\mu\nu} + D_\sigma F_{\mu\nu}\} - 2\{F_{\mu\rho}, F_{\nu\sigma}\} \right). \quad (9)$$

În programul elaborat de noi și prezentat în lucrarea [7], s-au folosit următoarele instrucțiuni pentru calculul acestor corecții cuantice de ordinul întâi:

```
> grdef('A1 {'^a miu} := -theta{'^rho ^sigma} * A {'^b rho} * (DA {'^c sigma miu} + F {'^c sigma miu}) * d {'^a b c}/4);
> grdef('F1 {'^a miu niu} := -theta{'^rho ^sigma} * (A {'^b rho} * (DF {'^c miu niu, sigma} + Dg {'^c miu niu sigma}) - 2 * F {'^b miu rho} * F {'^c niu sigma}) * d {'^a b c}/4);
> grcalc (A1(up, dn), F1(up, dn, dn));
> grdisplay(_);
```

Programul de calcul detaliat este dat în lucrarea [7], iar unele aplicații sunt prezentate mai jos în cadrul **Obiectivului 2**.

1.2. Construirea programului de obținere a ecuațiilor de câmp

S-a considerat mai întâi cazul unui grup gauge de simetrie internă, cum ar fi de exemplu $U(N)$ sau $SU(N)$. Impunând condiția de minim $\delta S_g = 0$ pentru integrala acțiunii (4) se obțin următoarele ecuații de câmp

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f_{bc}^a A^{b\mu} F_{\mu\nu}^c = 0, \quad (10)$$

Programul de calcul realizat cuprinde instrucțiuni de introducere a componentelor câmpurilor gauge $A_\mu^a(x)$, ale tensorului $F_{\mu\nu}^a$ asociat, după care se scriu ecuațiile de câmp, după cum urmează:

```
> grdef(EQ{^a miu}:=F{^a mu niu,^miu}+g*f{^a b c}*A{^b^miu}*F{^c miu niu});
> gcalc(EQ(up,dn));
> grdisplay(_);
```

De fapt, prin aceste instrucțiuni se calculează membrul stâng din (10), iar ecuațiile de câmp se obțin egalând cu zero expresiile obținute.

În al doilea rând, s-a construit un program de calcul în care grupul gauge este $G \times SU(N)$ și rezultatele au fost particularizate pentru $N = 2$. Câmpurile gauge $SU(N)$ sunt notate cu $A_\mu^a(x)$, iar cele ale lui G prin $G_\mu^\alpha = \delta_\mu^\alpha - g C_\mu^\alpha$, $\alpha = 0, 1, \dots, D-1$. Tensorul câmpurilor gauge $SU(N)$ se calculează acum folosind expresia:

$$F_{\mu\nu}^a = D_\mu A_\nu^a - D_\nu A_\mu^a + g_1 f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (11)$$

unde g_1 notează constanta de cuplaj $SU(N)$, iar D_μ este derivata gauge covariantă. Ecuațiile de câmp se obțin, ca și anterior, impunând principiul acțiunii minime pentru acțiunea celor două câmpuri gauge și folosind facilități oferite de "StringTools" [4]. Pentru aceasta s-au introdus anterior componentele tensorului energie-impuls gravitațional T_ν^α și ale curenților J_a^μ pentru grupul $SU(N)$ [7]. Instrucțiunile de calcul ale ecuațiilor de câmp sunt:

```
EqSUN:=proc()
  for i from 1 to m do
    X:=cat('EQ',i,'{nu}:=Ac',i,'{mu nu,^mu} +
    g1*etal{nu sigma}*J',i,'{^sigma}');
    grdef(X); gcalc(X); grdisplay(_);
  end do; end proc;
EqGrav:=proc()
  grdef('gb{mu nu}:=etal{alpha beta}*Gbinv{mu ^alpha}*
  Gbinv{nu ^beta}',sym=[[1,2]]); gcalc(gb(dn,dn));
  #grdef('T{^nu alpha}:= here is the expression of
  #the gravitational energy-momentum tensor
  gcalc(T(up,dn));
  grdef('EX{^mu ^nu alpha}:= (1/4)*etalinv{^mu ^rho}*
  etalinv{^nu ^sigma}*gb{alpha beta}*F{^beta rho sigma}-
  (1/4)*etalinv{^nu ^rho}*F{^mu rho alpha}+
  (1/4)*etalinv{^mu ^rho}*F{^nu rho alpha}-
  (1/2)*etalinv{^mu ^rho}*kdelta{^nu alpha}*
  F{^beta rho beta}+(1/2)*etalinv{^nu ^rho}*
  kdelta{^mu alpha}*F{^beta rho beta}');
  gcalc(EX(up,up,dn));
  grdef('EQG{^nu alpha}:=EX{^mu ^nu alpha,mu}+
  g*T{^nu alpha}'); gcalc(EQG(up,dn)); grdisplay(_);
end proc;
```

1.3. Elaborarea unor programe pentru obținerea de soluții

Pentru obținerea unor soluții ale ecuațiilor de câmp s-a elaborat un program analitic corespunzător grupului gauge $G \times SU(2)$. Câmpurile gauge sunt determinate în acest caz numai de două funcții: $U(r)$ - pentru G și $V(r)$ - pentru $SU(2)$. Cu programul prezentat mai sus se deduc următoarele ecuațiile de câmp cuplate:

$$(1 - gU)(rV'' + 2V') - grVU'' - 2gVU' - 2grU'V' = 0, \quad (12)$$

$$2grU'(1 - gU) + 2U - gU^2 = 0. \quad (13)$$

Soluțiilor acestor ecuații se obțin cu ajutorul pachetului de calcul *dsolve* inclus în Programul MAPLE, după cum urmează:

```
> grdef('G^{alpha mu}');
> grdef('A^{a mu}');
> gcalc(G(up,dn)); gcalc(A(up,dn));
> ode1:=diff(U(r), r) = (g*U(r)^2-2*U(r))/(2*g*r*(1-g*U(r)));
> dsolve(ode1, U(r));
> ode2:=(1-g*U(r))*r*diff(V(r), r, r)+2*diff(V(r), r)=g*r*V(r)*diff(U(r), r, r)+
2*g*V(r)*diff(U(r), r)+2*g*r*diff(U(r), r)*diff(V(r), r);
> dsolve(ode2, V(r));
```

După rulare, programul afișează următoarele soluții

$$U_{1,2}(r) = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{a}{r}} / g, \quad V_1(r) = C_1 \sqrt{1 + \frac{a}{r}}, \quad V_2(r) = C_2 \sqrt{\frac{r}{r+a}}, \quad (14)$$

unde a și $C_{1,2}$ sunt constante arbitrare de integrare. Alegând $a = -2GM$, soluția $U(r)$ corespunde la metrica Schwarzschild [7].

Obiectivul 2. Aplicații ale programelor elaborate la teoriile gauge cu grup $SU(n) \times SO(p, q)$

2.1. Aplicarea programelor și rutinelor de calcul la modele gauge cu simetrie sferică

A. Teorie gauge comutativă. O aplicație a programelor realizate prin lucrările noastre se referă la cazul când grupul gauge este $SU(2) \times SO(4,1)$, unde $SU(2)$ este considerat ca grup gauge de simetrie internă, iar $SO(4,1)$ este grupul de-Sitter. Acest model de teorie gauge descrie simultan diferite interacțiuni între câmpurile gauge interne și câmpul gravitațional. Câmpurile gauge asociate, cu simetrie sferică, sunt alese sub forma:

$$e_\mu^0 = (\sqrt{N}, 0, 0, 0) e_\mu^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{N}}, 0, 0, 0 \right), e_\mu^2 = (0, 0, r, 0), e_\mu^3 = (A, 0, 0, r \sin \theta) - \text{pentru } SO(4,1)$$

$$A = uT_3 dt + \cos \theta T_3 d\varphi, \quad - \text{pentru } SU(2)$$

unde N și u sunt funcții numai de variabila radială r . Ecuațiile de câmp corespunzătoare sunt

$$(rN' + N - 1) + r^2 u'^2 - \frac{1}{r^2} + \Lambda r^2 = 0, \quad (15)$$

$$ru'' + 2u' = 0. \quad (16)$$

Folosind programul de calcul realizat în lucrările noastre se obțin soluții analitice. Instrucțiunile de calcul și rezultatele obținute sunt:

```
> ode1:=r*diff(u(r),r,r)+2*diff(u(r),r);
> dsolve(ode1);
> u(r) := C1+C2/r;
> ode2:=r*diff(N(r),r)+N(r)-1+r^2*(diff(u(r),r))^2+1/r^2+Lambda*r^2;
> N(r) = -1/3*Lambda*r^2+1+1/r^2*C2^2+1/(r^2)+1/r*C3;
```

În expresiile pentru $u(r)$ și $N(r)$ apar constantele de integrare arbitrare C_1, C_2 și C_3 . Alegând convenabil valorile $C_1 = 1, C_2 = \sqrt{q^2 + g^2 - 1}, C_3 = -2GM$, soluțiile obținute descriu o gaură neagră colorată (colored black hole), având sarcina electrică q și sarcina magnetică g [6, 11].

B. Teorie gauge ne-comutativă. S-a construit un model de teorie gauge cu grup de simetrie $U_*(2)$ [1] pe un spațiu-timp ne-comutativ având torsiunea ne-nulă [2,6]. Câmpurile gauge $U(2)$, notate prin $A = A_\mu^a(x) T_a dx^\mu$, $a = 0,1,2,3$ [2,5], se aleg sub forma

$$A = uT_3 dt + w(T_2 d\theta - \sin\theta T_1 d\varphi) + \cos\theta T_3 d\varphi + vT_0 dt, \quad (17)$$

unde u, v, w sunt funcții care depind numai de variabila radială r . Coeficienții de conexiune aleși sunt determinați de o singură funcție necunoscută $A(r)$: $\Gamma_{10}^0 = -A'/A, \Gamma_{11}^1 = A'/A$. Se presupune că funcția $A(r)$ determină, în același timp, și parametrii de ne-comutativitate

$$: \theta^{10} = -\theta^{10} = 1/A, \theta^{23} = -\theta^{32} = b = const. \quad (18)$$

În programul de calcul se introduc mai întâi componentele câmpurilor gauge $e_\mu^a(x)$ și $A_\mu^a(x)$. Programul conține un număr de proceduri care calculează apoi tensorii de torsiune și curbura $T_{\mu\nu}^\rho, R_{\lambda\rho\sigma}^\nu, \tilde{R}_{\lambda\rho\sigma}^\nu$ ai spațiului-timp ne-comutativ, derivatele covariante $\nabla_\lambda T_{\mu\nu}^\rho, \nabla_\lambda R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}, \tilde{\nabla}_\lambda R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}, \nabla_\lambda \tilde{R}_{\mu\nu}^{\rho\sigma}, \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{R}_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ și $\nabla_\lambda \theta^{\mu\nu}, \tilde{\nabla}_\lambda \theta^{\mu\nu}$ ale torsiunii $T_{\mu\nu}^\rho$, curburilor $R_{\lambda\rho\sigma}^\nu, \tilde{R}_{\lambda\rho\sigma}^\nu$ și ale bi-vectorului $\theta^{\mu\nu}$ respectiv, deformările cuantice de ordinul întâi $A_\mu^{(1)}, F_{\mu\nu}^{(1)}, G^{\mu\nu(1)}$ ale câmpurilor gauge, tensorului acestor câmpuri și ale metricii. Instrucțiunile de calcul pentru câteva dintre aceste mărimi sunt:

- > grdef(T {^rho miu niu} := \Gamma {^rho miu niu} - \Gamma {^rho niu miu});
- > grdef(R {^niu lambda rho sigma} := \Gamma {^niu sigma lambda rho} - \Gamma {^niu rho lambda sigma} + \Gamma {^niu rho

tau} * \Gamma {^tau sigma lambda} - \Gamma {^niu sigma tau} * {^tau rho lambda});

- > grdef({^niu lambda rho sigma} := \Gamma {^niu lambda sigma rho} - \Gamma {^niu lambda rho sigma} + \Gamma {^niu tau rho} * \Gamma {^tau lambda sigma} - \Gamma {^niu tau sigma} * \Gamma {^tau lambda rho});
- > grdef(theta {^miu ^niu});
- > grdef(\tilde{R} {^miu ^niu rho sigma} := theta {^miu ^lambda} * \tilde{R} {^niu lambda rho sigma});
- > grdef(D\theta {lambda ^miu ^niu} := theta {^miu ^niu, lambda} + \Gamma {^miu sigma lambda} * theta {^sigma ^niu} + \Gamma {^niu sigma lambda} * theta {^miu ^sigma});
- > grdef(F1 {^a miu niu} := -theta {^rho ^sigma} * (A {^b rho} * (DF {^c miu niu, sigma} + Dg {^c miu niu sigma}) - 2 * F {^b miu rho} * F {^c niu sigma}) * d {^a b c} / 4;

Având calculate aceste mărimi, se introduc în program ecuațiile de câmp, după care se calculează soluțiile analitice și/sau numerice. Instrucțiunile și procedurile de calcul sunt prezentate în secțiunile 2.2 (pentru soluțiile analitice) și 2.3 (pentru soluțiile numerice).

2.2. Calculul unor soluții analitice

Exemplificăm calculul acestor soluții pentru ecuația de câmp pentru potențialul gauge $y(r) \equiv A(r)$ din cazul teoriei gauge ne-comutativă $U_*(2)$ [2, 8]. Instrucțiunile folosite sunt:

- > ode := diff(y(r), r, r) * y(r) = 2 * diff(y(r), r)^2;
- > dsolve(ode, y(r));

și programul furnizează soluția $y(r) = -C_1 / (r + C_2)$, unde C_1 și C_2 sunt constante de integrare a căror valoare se determină alegând, de exemplu, condițiile inițiale: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Rezultă atunci $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ și deci soluția devine $y(r) = 1 / (1 - r)$. Se poate obține și o reprezentare grafică a soluției (vezi secțiunea 2.3), folosind instrucțiunile:

```
> y(r):=1/(1-r); > plot(y(r), r = -2..2, y = -2..2);
```

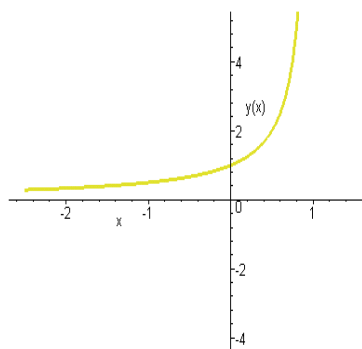
Programul elaborat permite obținerea de soluții analitice și în cazul unui sistem de ecuații de câmp cuplate, cum sunt cele din (15) și (16). Dacă ecuația sau sistemul de ecuații pe care dorim să îl rezolvăm nu admite soluții analitice, atunci trebuie să folosim metode numerice, așa cum se descrie în secțiunea care urmează.

2.3. Obținerea de soluții numerice și reprezentări grafice 2D și 3D

Programul de calcul elaborat permite rezolvarea numerică a unor ecuații diferențiale și reprezentarea grafică a rezultatelor obținute. Prezentăm instrucțiunile corespunzătoare din program pentru aceeași ecuație considerată mai sus:

```
with(DEtools):
> DEplot(diff(y(x),x$2)*y(x)=2*diff(y(x),x)^2,y(x),
> x = -2.5..1.4,[y(0)=1,D(y)(0)=1],y=-4..5,stepsz=.05);
de1 := {(D@@2)(x)(t)*x(t)=2*diff(x(t),t)^2}:
> init1 := {x(0)=1, D(x)(0)=1}:
> F := dsolve(de1 union init1, {x(t)},type=numeric, method=mgear,
> value=array([0,-.2,-.4,-.6,-.8,0,.2,.3,.4,.5,.6,.8]));
```

Tabelul cu valorile numerice și graficul 2D obținut sunt prezentate mai jos. Din Tabel se observă că programul furnizează și valorile numerice ale derivatei de ordinul întâi ale funcției necunoscute.



r	$A(r)$	$A'(r)$
-0.8	0.5555556658	0.3086420107
-0.6	0.6250001475	0.3906251679
-0.4	0.7142857491	0.5102039807
-0.2	0.8333333391	0.6944443349
0	1	1
0.2	1.250000270	1.562501224
0.4	1.666667835	2.777784075
0.6	2.500004736	6.250033069
0.8	5.000030784	25.00036772

În cazul când o soluție depinde de două variabile folosim pachetul *plot3d*, specificând domeniile de valori dorite. De exemplu, pentru funcția $\sin \theta / (1 - r)$, graficul 3D se obține prin instrucțiunea:

```
> plot3d({sin(theta)/(1-r)}, theta = -Pi..Pi, r = -3..3); pentru  $\theta \in (-\pi, \pi)$ ,  $r \in (-3, 3)$ .
```

Obiectivul 3. Studiul asistat de calculator a dinamicii câmpurilor gauge

3.1. Formularea unui model dinamic de teorie gauge cu grup structural $SU(n) \times SO(p, q)$

Potențialele gauge pentru un astfel de model sunt notate cu $A_\mu^\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n^2 - 1$ - în cazul grupului $SU(n)$ și $A_\mu^{ij}(x) = -A_\mu^{ji}(x)$, $e_\mu^i(x)$, $i, j = 0, 1, \dots, m - 1$ - în cazul grupului $SO(p, q)$. Ele descriu câmpurile gauge ne-abeliene interne și respectiv câmpul gravitațional. Folosind definiția generală (2), construim tensorii asociați acestor câmpuri $F_{\mu\nu}^{ij}(x)$ și $G_{\mu\nu}^\alpha(x)$. Integrala acțiunii pentru acest sistem are expresia

$$S_{EYM} = \int d^4x e \left[-\frac{1}{16\pi G} F - \frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu}^\alpha G_\alpha^{\mu\nu} \right], \quad (19)$$

unde $F = F_{\mu\nu}^{ij} e_i^\mu e_j^\nu$ și $e = \det(e_\mu^i)$. Ea corespunde la teoria standard a gravitației în interacțiune cu câmpul gauge ne-abelian. Ca aplicație vom considera cazul grupului gauge $SU(2) \times SO(4, 1)$ descris în secțiunea 2.1.

Introducem apoi în model un câmp materie scalar real $\phi(t, x)$ de masă m descris de Lagrangianul

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} f \phi^4, \quad (20)$$

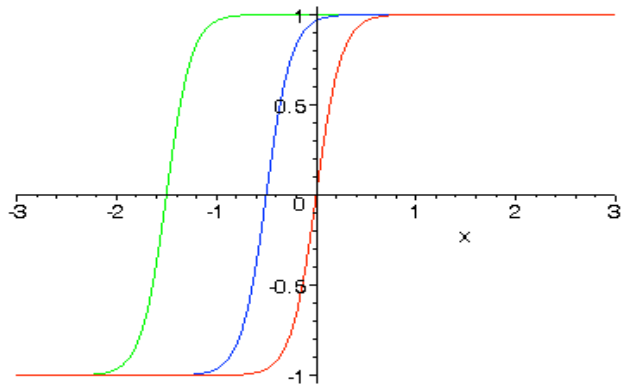
unde f este constanta de auto-interacțiune. Obținem astfel un model dinamic, pentru care starea de vid este dublu degenerată $\phi_v = \pm m / \sqrt{f}$ (aceasta indicând o rupere spontană de simetrie). Lagrangianul (20) conduce la o ecuație de câmp pentru $\phi(t, x)$ de forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = m^2 \phi - f \phi^3. \quad (21)$$

3.2. Construirea programului de calcul

Cu ajutorul subrutinelor *dsolve*, *PDEtools* și *plot 3d*, determinăm soluția acestei ecuații și reprezentăm grafic $\phi(t, x)$. Pentru aceasta folosim următoarea secvență de instrucțiuni:

```
> PDE := diff(phi(t,x),t,t)-diff(phi(t,x),x,x)=phi(t,x)-phi(t,x)^3;
> struc := pdsolve(PDE,HINT=f(t)*g(x));
> plot3d(phi(t,x), t=-1..1, x=-1..1);
```



de simetrie

Soluția obținută prin program este

$$\phi(x, t) = \tanh \left(-C_1 - C_2 t + \frac{\sqrt{4C_2^2 + 2x}}{2} \right) \quad (22)$$

Pentru o valoare fixată a timpului t ea reprezintă soluția kink (vezi figura pentru valorile $t = 0, 2, 6$ ale timpului). Constantele de integrare C_1, C_2 au fost alese convenabil pentru cele trei grafice. Pe această cale se poate urmări evoluția dinamică a câmpului $\phi(t, x)$ în modelul de teorie gauge cu rupere spontană considerat.

3.3. Simularea unor procese de interacțiune a câmpurilor materie prin intermediul câmpurilor gauge

Quantificarea câmpurilor gauge și studiul diferitelor tipuri de interacțiuni se realizează folosind metoda integralei funcționale. Vom considera un sistem compus dintr-un multiplu $\psi^a(x)$ de câmpuri spinoriale, un multiplu de câmpuri scalare cu sarcină electrică $\phi^a(x)$, un multiplu de câmpuri gauge $A_\mu^k(x)$ și un sistem de câmpuri fantomă (ghost fields) $c^k(x)$. Lagrangianul unui astfel de sistem conține termeni corespunzători fiecărui multiplu de câmpuri în parte, precum și de interacțiune. De exemplu, pentru câmpurile gauge în *etalonul* $-\alpha$ și câmpurile spinoriale în interacțiune cu câmpurile gauge avem termenii

$$L_1 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^k F_k^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^{\mu k}), \quad L_2 = \bar{\psi}^a \gamma^\mu (\partial_\mu + ig T_k A_\mu^k) \psi^b - M \bar{\psi}^a \psi_a, \quad (23)$$

unde g este constanta de cuplaj. Propagatorul câmpurilor gauge în reprezentarea impuls are forma

$$D_{\mu\nu}^{kl}(k) = \frac{\delta_{kl}}{k^2} \left[g_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (24)$$

Având aceste rezultate, putem calcula apoi expresiile asociate diferitelor vertex-uri sau bucle de interacțiune din diagramele Feynman. De exemplu, pentru cazul interacțiunii dintre un câmp spinorial și un câmp gauge, sau de auto-interacțiune dintre două câmpuri gauge, avem respectiv

$$g \gamma_\alpha (T_a)_{cb}, \quad -ig^2 f_{lac} f_{lbd} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) - ig^2 f_{lad} f_{lbc} (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}) - ig^2 f_{lab} f_{lcd} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}). \quad (25)$$

În lucrările noastre am elaborat un program de calcul al mărimilor menționate mai sus pentru simularea diferitelor procese de interacțiune dintre câmpurile materie și/sau câmpurile gauge. Prezentăm mai jos câteva secvențe de instrucțiuni de calcul pentru primul vertex din (25) în cazul grupului $SU(2)$:

```
> grdef(`gamma0{miu niu}`); grdef(`gamma1{miu niu}`); grdef(`gamma2{miu niu}`);
  grdef(`gamma3{miu niu}`);
> grdef(`T1{c b}`); grdef(`T2{c b}`); grdef(`T3{c b}`);
> grcalc(gamma0(dn,dn), gamma1(dn,dn), gamma2(dn,dn), gamma3(dn,dn), T1(dn,dn)); T2(dn,dn));
T3(dn,dn));
> grdef(`V02{a b c d}:= g*gamma0{a b}*T2{c d}`);
> grdisplay(_);
```

Analog, introducând în program componentele metricii spațiului-timp $g_{\alpha\beta}$ și constantele de structură f_{abc} ale grupului $SU(2)$, calculăm cel de-al doilea vertex din (25). Pentru alte vertex-uri sau bucle, calculele se dovedesc mai complicate și acest lucru arată utilitatea programului de calcul pentru obținerea expresiilor corespunzătoare.

Bibliografie

A. Lucrări publicate în reviste indexate ISI

1. G. Zet: *U(2) gauge theory on noncommutative geometry*; International Journal of Modern Physics A (IJMPA) Vol. 24, No.15, p. 2889 – 2897, 2009
2. M. Chaichian, M. Oksanen, A. Tureanu, **G. Zet** : Noncommutative gauge theory using covariant star product defined between Lie-valued differential forms, Phys. Rev. D 81, 085026-11, 2010
3. M. Chaichian, M. Oksanen, A. Tureanu, **G. Zet** : Covariant star product on symplectic and Poisson space-times manifolds, ; International Journal of Modern Physics A (IJMPA) Vol. 25, No.18-19, p. 3765 – 3796, 2010

B. Lucrări publicate în reviste indexate în baze de date internaționale

4. G. Zet, V. Manta, C. Popa, Symbolic routines for gauge models, Bul. Inst. Politehnic Iasi, Tom LV (LIX), Fasc. 4, Sect. Matematica. Mecanica Teoretica. Fizica, 2009, p. 41-52
5. G. Zet, *Noncommutative gauge theory with covariant star product*, Proceedings of the Physics Conference: TIM – 09, American Institute of Physics (IOP), Vol. 1282, 2010, p.13 – 18
6. G. Zet : Quantum deformation of the gauge fields, Romanian Journal of Physics, Vol. 55, Nr. 9-10, 2010, p.
7. G. Zet, Spherically symmetric gauge fields on noncommutative space-time, Bul. Inst. Politehnic Iasi, Tom LVI (LX), Fasc. 4, Sect. Matematica. Mecanica Teoretica. Fizica, 2010, p.
8. G. Zet, Gauge theories on a noncommutative Poisson manifold as space-time, Analele Univ. Craiova Vol. 20, 2010, p.

C. Lucrări prezentate la conferințe

9. G. Zet: Noncommutative gauge theory with covariant star product, Phzsics Conference TIM-09, November 27-28, 2009, Timișoara, Romania
10. G. Zet: Gauge theories on a noncommutative Poisson manifold as space-time, The 7-th Spring School & Workshop on QFT and Hamiltonian Systems, May 10-15, 2010, Călimănești-Căciulata, Romania
11. G. Zet: Colored black hole in noncommutative gauge theory, National Conference on Theoretical Physics NCTP 2010 – fourth edition, June 23-25, 2010, Iași, Romania